חישוב מומנט התמד של מערכת נקודות

מומנט ההתמד מוגדר :

$$I = \sum m_i r_i^2$$

שימו לב שהכוונה היא לציר שניצב לדף.

1. סביב מסה m1:

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = m_2 L^2 + m_3 (\sqrt{2} L)^2 = \frac{m}{2} L^2 + m 2 L^2 = \frac{5}{2} m L^2$$

2. סביב מסה m3:

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1 (\sqrt{2} L)^2 + m_2 L^2 = \frac{m}{2} 2 L^2 + \frac{m}{2} L^2 = \frac{3}{2} m L^2$$

3. על מנת לעבור לציר מקביל העובר דרך מרכז המסה, ניתן להשתמש במשפט שטיינר (זיכרו: המשפט נכון אך ורק למעבר מ/אל מרכז המסה!)
עלינו לברר את המרחק של מרכז המסה מאחד הצירים שכבר חישבנו. קודם כל נברר את מרכז המסה, במערכת הצירים שמופיעה בשאלה. בציר X נקבל:

$$X_{cm} = \frac{m_1 L + m_2 0 + m_3 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{m}{2} L}{2m} = \frac{L}{4}$$

ובציר Y:

$$Y_{cm} = \frac{m_1 0 + m_2 0 + m_3 L}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{mL}{2m} = \frac{L}{2}$$

עכשיו נותר לחשב את המרחק (בריבוע) בין מרכז המסה לאחת הנקודות שכבר חישבנו. אבחר את m1:

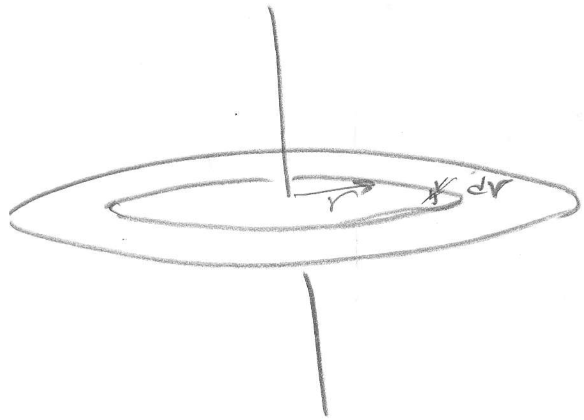
$$R_{cm \to m_1}^2 = (L - \frac{L}{4})^2 + \frac{L}{2}^2 = \frac{13}{16} L^2$$

ומשפט שטיינר נותן לנו:

$$I_{cm} = I m_1 - (m_1 + m_2 + m_3) R_{cm \to m_1}^2 = \frac{5}{2} m L^2 - 2m \frac{13}{16} L^2 = \frac{7}{8} m L^2$$

פתרון 1-6206

חישוב מומנט התמד של דיסקה.



הרעיון הכללי בשאלה להתייחס לדיסקה כאוסף של טבעות. לכן, נמצא מומנט התמד של טבעת אחת ונסכום על כל הטבעות המרכיבות את הדיסקה.

אז: מומנט התמד של טבעת $dI = dm\, r^2$

כאשר dm זה המסה של טבעת ברדיוס r ועובי dr

$$dm = \underbrace{\sigma}_{\text{(1)}} \cdot \underbrace{2\pi r}_{\text{(2)}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{(3)}}$$

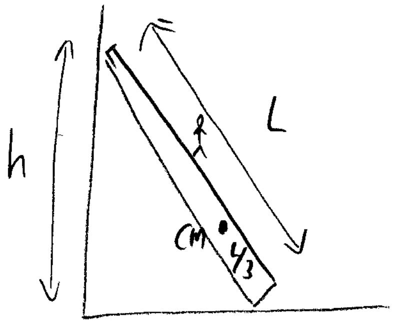
(1) צפיפות מסה (2) היקף הטבעת (3) עובי הטבעת

הגדרנו צפיפות מסה (מסה כוללת חלקי שטח כולל) $\sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$

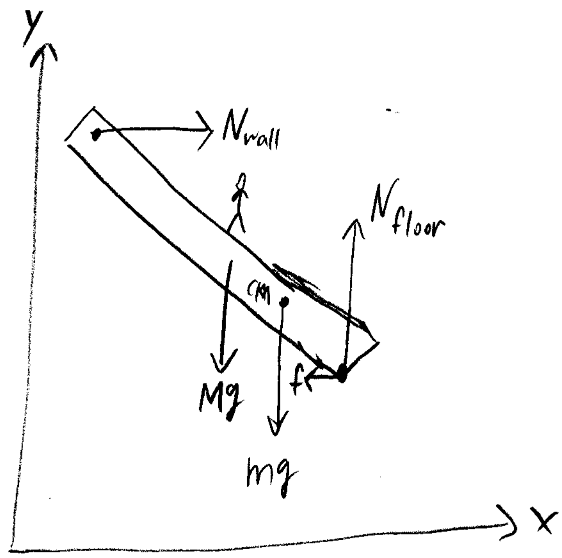
$$I = \int dI = \int_0^R dm\, r^2$$

$$= \int_0^R \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot r^2 \cdot dr = \frac{MR^2}{2}$$

1_6303 פתרון



נשרטט את כל הכוחות והמומנטים הפועלים על הסולם.



(הכח הנורמלי שהאדם
מפעיל הוא Mg, כי האדם
נמצא בשיווי-משקל ולכן גם
הנורמלי שלו שווה למשקלו)

שקול - הכוחות בצירים x ו-y הם

$$\sum F_x = N_{wall} - f$$

$$\sum F_y = N_{floor} - Mg - mg$$

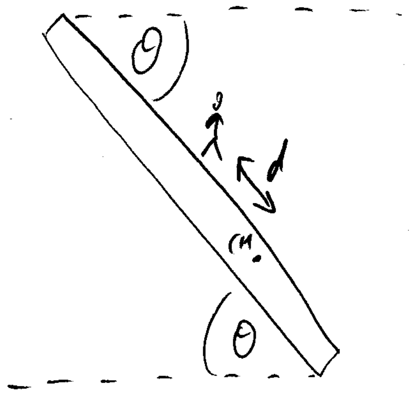
היות ושקול הכוחות בציר y הוא אפס, נסיק

$$\boxed{N_{floor} = (M+m)g}$$

מציר x נסיק $\boxed{N_{wall} = f}$. כדי למצוא את f נדרוש את שקול
המומנטים ביחס לציר העובר דרך מרכז המסה.

מומנטים לגבי:

(נסמן ב-d את מרחק האדם ממרכז המסה)



$$\sin\theta = \frac{h}{L}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$$

$$\tau_{wall} = N_{wall} \cdot \frac{2L}{3} \cdot \sin\theta = N_{wall} \cdot \frac{2h}{3}$$

$$\tau_{\text{person}} = Mg \cdot d \cdot \cos\theta = Mg \cdot \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} d$$ (כשהוא משוקל $d = \frac{L}{6}$)

$$\tau_{floor} = N_{floor} \cdot \frac{L}{3} \cdot \cos\theta = N_{floor} \cdot \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3}$$

(mg לא יוצר מומנט כי הוא נמצא על מרכז המסה)

$$\tau_{friction} = f \cdot \frac{L}{3} \cdot \sin\theta = f \cdot \frac{h}{3}$$

היות והסולם לא מסתובב כאשר האדם נמצא במרחק $d = \frac{L}{6}$ ממרכז המסה, נסיק שכאשר $d = \frac{L}{6}$ שקול המומנטים הוא אפס, כלומר:

$$\tau_{floor} + \tau_{\text{person}} = \tau_{wall} + \tau_{friction}$$

$$N_{floor} \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3} + Mg \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} d = N_{wall} \cdot \frac{2h}{3} + f \cdot \frac{h}{3}$$

במצב של שווי משקל, נציב:
$$\begin{cases} N_{wall} = f \\ N_{floor} = (M+m)g \end{cases}$$

ונסיק
$$(M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}d = f\cdot\frac{2h}{3} + f\cdot\frac{h}{3} \quad /:h$$

$$\boxed{f = (M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}\frac{d}{h}}$$

עבור $d = \frac{L}{6}$ נקבל

$$f = (M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{6h}$$

$$\boxed{f = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h}\left(\frac{3}{2}M + m\right)g}$$

d המקסימלי יתקבל כאשר כח החיכוך מקסימלי: $f_{max} = \mu_s N_{floor}$

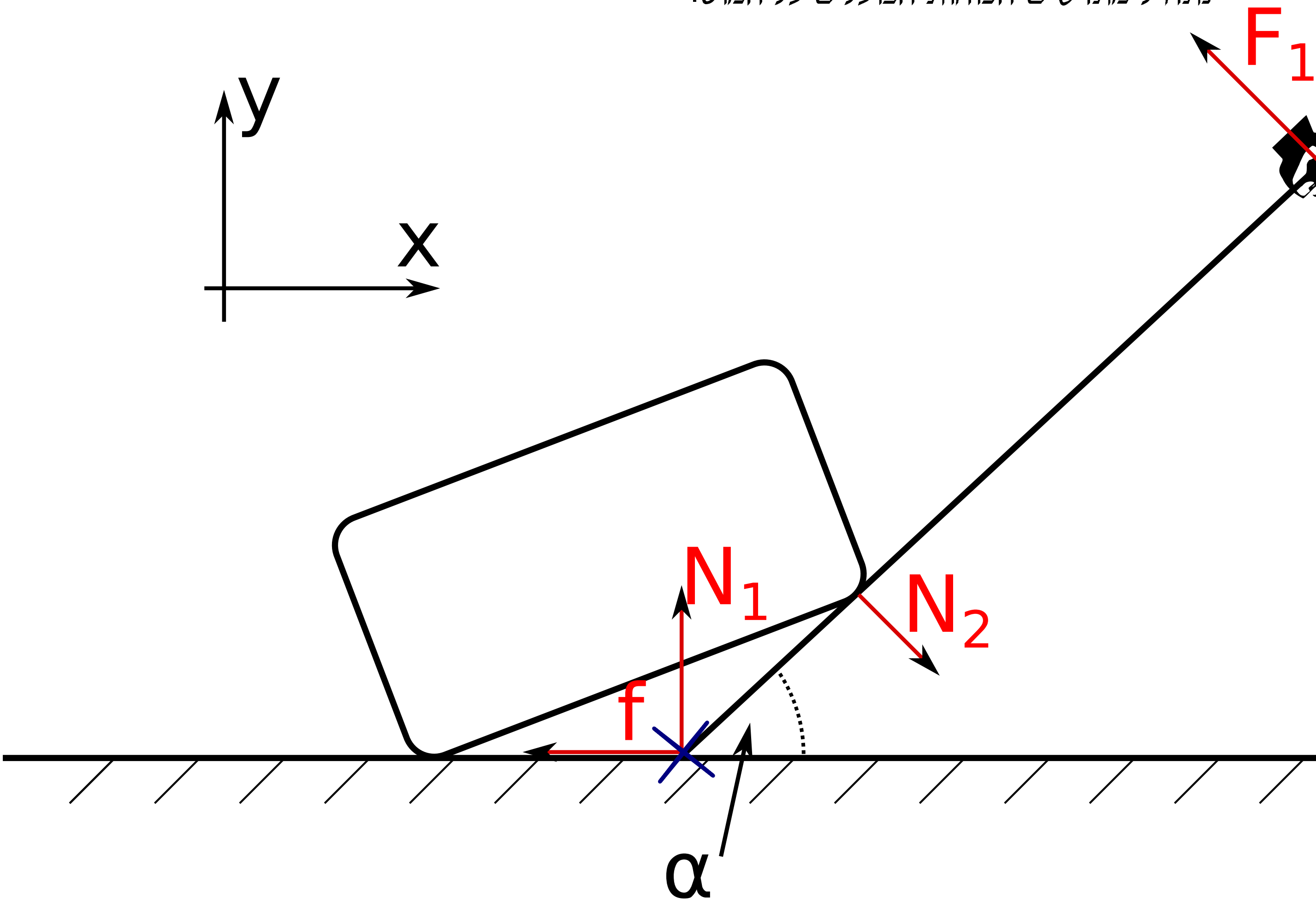
כלומר $f_{max} = \mu_s (M+m)g$ $\quad f \le \mu_s (M+m)g$

נסיק ש-d צריך לקיים:
$$(M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}\frac{d}{h} \le \mu_s (M+m)g$$

ולכן
$$\boxed{d_{max} = \frac{M+m}{M}\left(\mu_s\frac{h}{\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{1}{3}\right)L}$$

הרמת קופסאות

נתחיל מתרשים הכוחות הפועלים על המוט:



המערכת במנוחה, ולכן ידוע שסכום המומנטים מתאפס. נבחר כנקודת ציר את נקודת המגע עם הרצפה, ונחשב את המומנטים. נתון לנו שנקודת המגע של הפינה הימנית של הקופסא היא ברבע מאורך המוט.
נסמן את אורך המוט בL ונקבל את סכום המומנטים:

$$\sum \tau = F_1 L - N_2 \frac{L}{4} = 0$$
$$F_1 L = N_2 \frac{L}{4}$$
$$N_2 = 4F_1$$

וקיבלנו שהכוח הפועל על הפינה הימנית של הקופסא הוא פי 4 מהכוח אותו אנחנו מפעילים. זו דוגמא ל"מכונה פשוטה" (חפשו בויקיפדיה), שעוזרת מאוד בביצוע מטלות. שימו לב שהעבודה שנעשית (אינטגרל על כוח כפול דרך) זהה כמובן. לא ניתן להרוויח אנרגיה מכלום, אבל ניתן להפעיל פחות כוח על דרך ארוכה יותר.

בשביל הכוח שהמוט מפעיל על הרצפה נוסיף את משוואות הכוחות בשני הצירים:

$$F_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha + N = 0$$
$$-F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - f = 0$$

נקבל מיידית:

$$N = N_2 \cos\alpha - F_1 \cos\alpha = 4F_1 \cos\alpha - F_1 \cos 2\alpha = 3F_1 \cos\alpha$$

בשביל לקבל את החיכוך, נעזר בתנאי על חיכוך סטטי, יחד עם משוואת הכוחות בציר x:

$$\begin{aligned}
f &\leq \mu_s N \\
f &= -F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha = -F_1 \sin\alpha + 4F_1 \sin\alpha = 3F_1 \sin\alpha \\
&= N \tan\alpha \\
N \tan\alpha &\leq \mu_s N \\
\mu_s &\geq \tan\alpha
\end{aligned}$$

כאשר בדרך הצבנו $3F_1 \cos\alpha = N$.
קיבלנו תנאי על מקדם החיכוך שתלוי רק בזווית המוט.