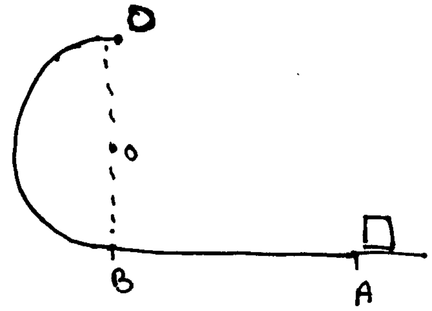
1

4.6

2X-09-01

א)



ויש שימור אנרגיה כי המשטח חלק ולכן:

$$E_i = E_f$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_c \qquad h_c = 2R$$

נמצא את V_D ~~הקריטית~~ V הדרושה (המינימלי) ~~להשלמת~~ לסגור המעגל.

נסתכל על נק׳ D:

בנק׳ D:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$\Sigma F_r = \frac{m v_D^2}{R}$$

$$N + mg = \frac{mV_D^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V_D = \sqrt{\frac{NR}{m} + gR}$$

את המהירות הקריטית נקבל כאשר $N=0$ כלומר:

$$\boxed{V_{D_c} = \sqrt{gR}}$$

חזרה למש (1) :

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m \cdot gR + mg(2R)$$

$$v_A^2 = gR + 4gR$$

$$v_A = \sqrt{5gR}$$

(ג) נפתור סעיף זה ע"י קינמטיקה.

נחשב תחילה כמה זמן ייקח לגוף לפול גובה של (2R).

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$0 = 2R + 0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{4R}{g}$$

$$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

כעת נחשב את המרחק האופקי שהגוף עבר בזמן זה.

נשים לב שבנק' D המהירות שהשגנו בסעיף ה' V_{D_c} -

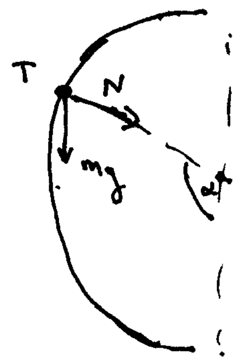
היא ~~...~~ בכיוון האופקי בלבד (משיק).

$$X = X_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

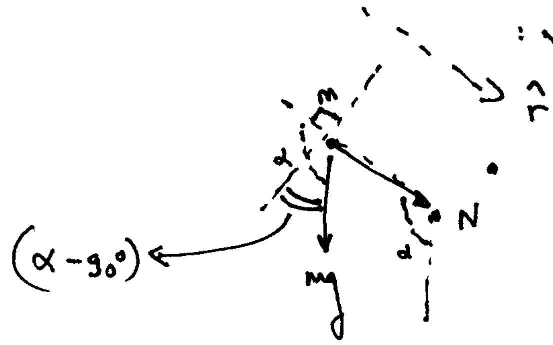
בוטס לנק' B $\rightarrow$ $X = V_{0x} \cdot t = \sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R$ $\Longrightarrow$ $(a_x = 0)$

$\boxed{\text{תשובה סופית: הכדור יפגע בוטס לנק' } A \text{: במרחק של } S-2R}$

ג. הגוף ינתק מהמסילה בנקודה בה $N=0$.



נבחר מערכת צירים כך:



$$\Sigma F_r = m\cdot a_r$$

$$N + mg\sin(\alpha - 90^\circ) = m\cdot a_r$$

בנק' T בה מתקיים הניתוק $N=0$ ולכן:

$$mg\sin(\alpha-90^\circ) = m\cdot a_r$$

$$(1)\quad \cancel{m}g\sin(\alpha-90^\circ) = \frac{\cancel{m}V_T^2}{R}$$

נעזר על שימור האנרגיה:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 = \frac{1}{2}mV_T^2 + mgh_T \qquad h_T = R + R\sin(\alpha-90^\circ)$$

$$V_A = 0.9\cdot\sqrt{5gR} = \sqrt{4.05\,gR}$$

$$\Rightarrow \quad V_T^2 = V_A^2 - 2gh_T \quad ,$$

(ii) $V_T^2 = 4.05gR - 2gR\left[1+\sin(\alpha-90^\circ)\right]$

נציב את הביטוי שקיבלנו עבור V_T^2 במשוואה (i) ונקבל:

$g:/$ $\quad \cancel{m}g\sin(\alpha-90^\circ) = \cancel{m}\left(4.05g - 2g\cancel{R}\left[1+\sin(\alpha-90^\circ)\right]\right)$

$3\sin(\alpha-90^\circ) = 2.05$

$\sin(\alpha-90^\circ) = 0.68$

$\Rightarrow \quad \alpha - 90^\circ = 43.10^\circ$

$\alpha = 133.10^\circ$ //

ב"ה

1_4117 - פתרון:

נתונים:

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 5 \\ 10 & 5 \le x \le 15 \\ 40-2x & 15 \le x \le 20 \end{cases}$$

$$m = 5\,kg, \quad V_0 = 4\,m/s.$$

א. עבודה בכל אחד מהקטעים:

$$W_1 = \int_{x=0}^{x=5} F_1(x)\,dx = \int_0^5 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^5 = 25\,j \quad (1)$$

$$W_2 = \int_{x=5}^{x=15} F_2(x)\,dx = \int_5^{15} 10 \cdot dx = \left[10x\right]_5^{15} = 10(15-5) = 100j \quad (2)$$

$$W_3 = \int_{x=15}^{x=20} F_3(x)\,dx = \int_{15}^{20} (40-2x)\,dx = \left[40x - x^2\right]_{15}^{20} = \quad (3)$$

$$= 40 \cdot 20 - 20^2 - 40 \cdot 15 + 15^2 = 25\,j$$

ב. לפי משפט עבודה-אנרגיה, השינוי באנרגיה הקינטית שווה לסך כל העבודה:

$$\Delta E = W_1 + W_2 + W_3 = 150\,j$$

ג.
$$\Delta E = \frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$V_1^2 = V_0^2 + \frac{2\Delta E}{m}$$

מהירות הגוף לאחר 20 מטרים - $V_1 = \sqrt{V_0^2 + \frac{2\Delta E}{m}} = \sqrt{16 + \frac{2 \cdot 150}{5}} \approx 8.72\,m/s$

תנועה מעגלית זקופה

על מנת שהגוף יבצע תנועה מעגלית זקופה, נדרוש שהחוט יהיה מתוח בכל עת ($T \geq 0$). הנקודה הקריטית ביותר היא כשהגוף בשיא הגובה. מהירותו שם היא v_0. לכן, תאוצתו הרדיאלית לכיוון מרכז המעגל היא $\frac{v_0^2}{l}$. נרשום את משוואת החוק השני של ניוטון עבור הנקודה הכי גבוהה:

$$T + mg = m\frac{v_0^2}{l}$$
$$m\frac{v_0^2}{l} - mg = T \geq 0$$
$$v_0 \geq \sqrt{gl}$$

מעניקים לכדור $v_0 = 2\sqrt{gl}$. אנחנו יודעים על פי הסעיף הראשון שהגוף אכן יבצע תנועה מעגלית זקופה. אפשר למצוא את מהירות הגוף בכל זווית בעזרת משוואת שימור האנרגיה. נקבע את האפס במרכז המעגל, ונקבל:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl\cos\theta$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gl(1-\cos\theta) = 4gl + 2gl - 2gl\cos\theta = 2gl(3-\cos\theta)$$

אז יש לנו גוף שנע בתנועה מעגלית, ואנחנו יודעים את מהירותו בכל עת. על מנת לקבל את המתיחות בחוט, נרשום את משוואות החוק השני עבור הציר הרדיאלי :

$$T + mg\cos\theta = ma_r = m\frac{v^2}{l}$$
$$T = m\frac{v^2}{l} - mg\cos\theta = mg(6-2\cos\theta) - mg\cos\theta = mg(6-3\cos\theta)$$

אומרים לנו שהחוט יקרע בT_{max}. כלומר ב:

$$T = mg(6-3\cos\theta) = T_{max}$$
$$6mg - T_{max} = 3mg\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{6}{3} - \frac{T_{max}}{3mg} = 2 - \frac{3.6}{3} = 0.8$$

את המהירות כפונקציה של הזווית כבר מצאנו מזמן, רק נציב את הזווית שחישבנו:

$$v_1 = \sqrt{gl(6-2\cos\theta)} = \sqrt{4.4gl}$$

לסעיף האחרון אנחנו צריכים את הרכיב האנכי של המהירות, ואת גובה הגוף ברגע הניתוק. יש לנו את גודל המהירות ואת הזווית, ולכן הכל ידוע. גובה הנתק (ביחס ל0 שקבעתי במרכז המעגל) הוא:

$$y_1 = l\cos\theta = 0.8l$$

ורכיב הy של המהירות:

$$v_{1y} = -v_1\sin\theta = -v_1\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{4.4gl}\sqrt{0.36} = -\sqrt{1.58gl}$$

נותר רק לרשום את משוואות התנועה של הגוף:

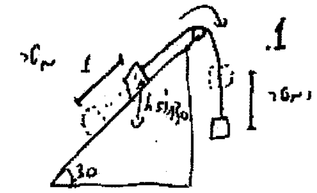
$$y = y_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$$
$$-3l = 0.8l - \sqrt{1.58gl}t - g\frac{t^2}{2}$$
$$\frac{g}{2}t^2 + \sqrt{1.58gl}t - 3.8l = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-\sqrt{1.58gl} \pm \sqrt{1.58gl + 4 \cdot 3.8l \cdot \frac{g}{2}}}{g}$$
$$t_+ \approx 0.56s$$

הזמן החיובי הוא הזמן הרלוונטי בבעיה שלנו.

[illegible] 1_4106

(1

פתרון תרגיל 5



$h = 1m$ משתמשים בקיום החוק.

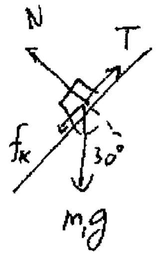
(נניח שהגוף נע בכיוון השעון).

$$\begin{cases} E_{\text{התחלה}} = m_2 g h \\ \quad \| \\ E_{\text{סוף}} = m_1 g h \sin 30 + \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 \end{cases}$$

(אותה מהירות לשתיהן (אותו חוט)).

$$V = \left[\frac{2}{m_1+m_2}(gh)\left(m_2 - m_1 \sin 30\right)\right]^{1/2} = \underline{\underline{8.85\ m/s}}$$

שימו לב שאם לא היינו יודעים מהן המסות אז $m_2 - m_1\sin 30$ יכול להיות שלילי שזה אומר שהגוף לא יכול לנוע בכיוון השעון אלא נגדו (קביעה עצמה כדי כדור שהוא נע בכיוון השעון).



ב. (לא השתנה כלום חוץ מהחיכוך)

$$E_{\text{סוף}} = E_{\text{התחלה}} + W_{f_k}$$

$$W_{f_k} = -f_k \cdot h = -\mu_k N h = -\mu_k m_1 g \cos 30 \cdot h$$

כלומר:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 = (m_2 - m_1 \sin 30) g h - \mu_k m_1 g \cos 30 h$$

$$\Downarrow$$

$$V = \underline{\underline{8.05\ m/s}}$$

קפיץ וחיכוך

בתנועה מA ל C פועלים כוחות הכובד, הנורמל, והחיכוך. הכובד משמר, הנורמל תמיד ניצב לתנועה ולכן אינו עושה עבודה, ואת עבודת החיכוך אנו יכולים לחשב. כוח החיכוך בקטע המדובר הוא:

$$f = \mu_k N$$

$$N - mg = 0$$

$$f = \mu_k mg$$

$$W = \int f dr = -\mu_k mgd$$

נסמן את גובה 0 במישור , ונשתמש במשפט עבודה אנרגיה:

$$\begin{aligned} K_i + U_i + W &= K_f + U_f \\ mgR - \mu_k mgd &= \frac{mv^2}{2} \\ v^2 &= 2g(R - \mu_k d) \end{aligned}$$

שימו לב שהמהירות בריבוע חייבת להיות חיובית, וזה נותן לנו תנאי לגבי האם בכלל הגוף יגיע לקפיץ.

הקפיץ מתכווץ בS, והשוואת האנרגיה מרגע הפגיעה בקפיץ ועד סיום ההתכווצות נותנת:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kS^2}{2} \\ 2mg(R - \mu_k d) &= kS^2 \\ k &= \frac{2mg(R - \mu_k d)}{S^2} \end{aligned}$$

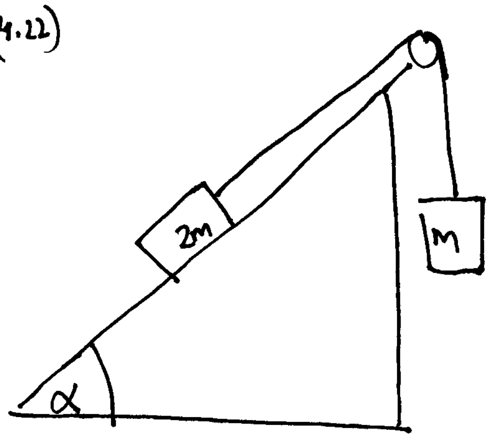
מכיוון שהחיכוך בהלוך ובחזור יעשה את אותה עבודה, ניתן פשוט לרשום את משפט העבודה-אנרגיה מתחילת התנועה ועד סופה:

$$\begin{aligned} mgR + W &= mgh \\ mgR - 2 \cdot \mu_k mgd &= mgh \\ h &= R - 2\mu_k d \end{aligned}$$

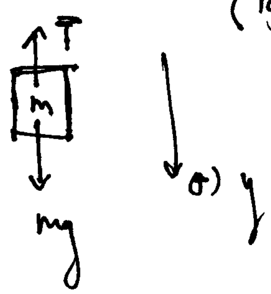
יש לשים לב ש$h > 0$. אם מקבלים גובה קטן מאפס, זה אומר שהגוף בכלל לא יסיים את התנועה, והחיכוך יעצור אותו בדרך.

(4.22)

ex_09_04



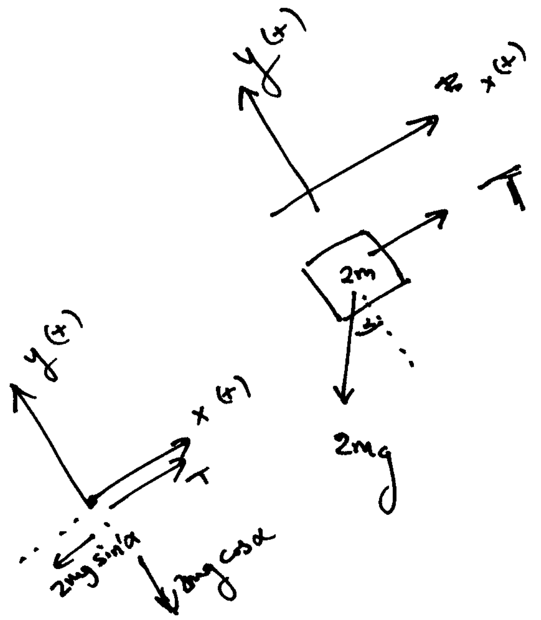
(א)



עבור שמ:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$mg - T = 0 \Rightarrow \underline{mg = T} \qquad (i)$$



עבור המסה השניה:

$$\Sigma F_x = 0$$

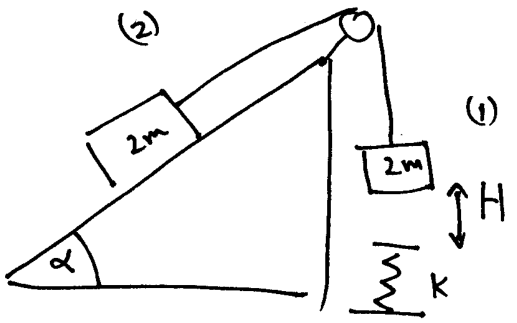
$$T - 2mg\sin\alpha = 0 \qquad (ii)$$

נציב את (i) ב(ii) ונקבל:

$$mg - 2mg\sin\alpha = 0$$

$$1 = 2\sin\alpha$$

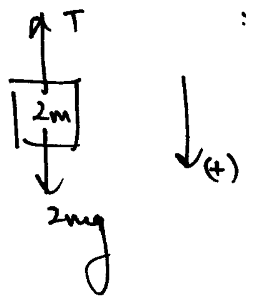
$$\alpha = 30^\circ$$



(ד)

מצאנו את α
מסעיף ג'

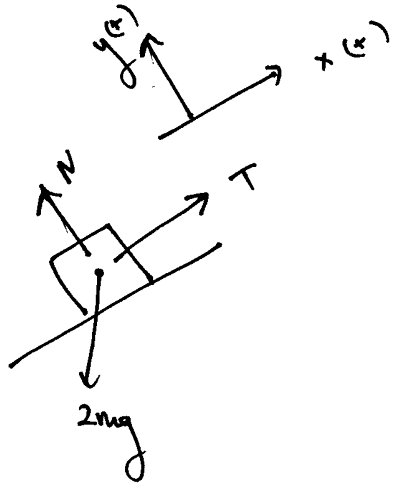
$(\alpha = 30^\circ)$



נסתכל על מסה (1):

$$\Sigma F_y = (2m)\cdot a_y$$

(i) $$2mg - T = 2m\cdot a$$



נסתכל על מסה (2):

$$\Sigma F_x = (2m)\cdot a$$

(ii) $$T - 2mg\sin\alpha = 2m\cdot a$$

נציב α ונקבל:

(ii) $$T - mg = 2ma$$

נחבר (i) + (ii) ונקבל:

$$\boxed{mg = 4ma} \Rightarrow \boxed{a = g/4}$$

$$V^2 = V_0^2 + 2a \cdot H$$

$$V^2 = 2 \cdot g/4 \cdot H \qquad (V_0 = 0)$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

$m_1^* = m_2^* = 2m$ /

דרך נוספת - דרך שימור אנרגיה.

$E_i = E_f$ שימור האנרגיה הוא שימור אנרגיה של כל המערכת

$$E_{1i} + E_{2i} = E_{1f} + E_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1^* V_{1_0}^2 + m_1^* g h_{1_0} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_0}^2 + m_2 g h_{2_0}$$

$$= \frac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2 + m_2 g h_{2_f}$$

הסימן (1) מתייחס למסה בשיפוע

לעומת הסימן (2) המתייחס למסה התלויה.

$h_{10} = h_{2_0} = 0$ [למישור שלא חיובים] ניתן להניח

כמו כן $V_{10} = V_{2_0} = 0$ ולכן:

$$0 + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg\,(H \sin\alpha) + \frac{1}{2}(2m)V^2 + 2mg\,(-H)$$

$i \Rightarrow$ מסמן התחלה.

$f \Rightarrow$ final סוף

נציב $\alpha = 30^\circ$ ונקבל:

שימו לב לכל אחד מהמסות יש אנרגיה "גובה", ואנרגיה קינטית

$$0 = -mgH + 2mV^2$$

$$V = \sqrt{gH/2} \quad //$$

הסט = X.

סעיף (3):

$$E_{el_i} + E_{1_i} + E_{2_i} = E_{1_f} + E_{2_f} + E_{el_i}$$

$$0 + (0+0) + (0+0) = \frac{1}{2} m_1^* V_{1_f}^2 + m_1^* g h_{1_f} + \frac{1}{2} m_2^* V_{2_f}^2$$

$$+ m_2^* g h_{2_f} + \frac{1}{2} k x^2$$

⇐ נתון כי החוט המחבר את הגופים נותר מתוח במשך כל זמן כיווץ הקפיץ

ולכן: $V_{1_f} = V_{2_f} = 0$

[הנחה זו, לדעתי - לא מציאותית...]

$$0 = 0 + (2m) g (H+X) \sin 30^\circ + 0$$

$$- 2mg (H+X) + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0 = mgH + mgX - 2mgH - 2mgX + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0 = + \frac{1}{2} k x^2 - mgX - mgH$$

$$0 = x^2 - \frac{2mg}{k} X - \frac{2mgH}{k}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4m^2 g^2}{k^2}\right) + \frac{8mgH}{k}}$$

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$

פיסיקלית - רק התשובה החיובית נכונה לכן:

$$X = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgH}{k}}$$