מפתחות ותפיסתן

נבנה מערכת קואורדינטות, בה גובה הזריקה הוא 0, הציר החיובי כלפי מעלה, ורגע הזריקה הוא ב $t=0$.
במערכת זו, הנתונים שניתנו לנו הם:

- גובה החלון: $y_1 = h = 4m$
- רגע התפיסה: $t_1 = 1.5s$
- הגוף נמצא בנפילה חופשית, ולכן תאוצתו קבועה, ושווה ל: $a = -g \approx -10\frac{m}{s^2}$

מכיוון שהמפתח בנפילה חופשית עם תאוצה קבועה, ניתן להשתמש במשוואות שקיבלנו לתנועה בתאוצה קבועה:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

למעשה, עבור רגע התפיסה, הכל נתון לנו פרט למהירות ההתחלתית:

$$y_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$$

קצת אלגברה והעברת אגפים מביאה אותנו ל:

$$v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{gt_1}{2}$$

ומי שרוצה להציב:

$$v_0 = \frac{4m}{1.5s} + \frac{10\frac{m}{s^2}1.5s}{2} = \frac{61}{6}\frac{m}{s}$$

בסעיף הבא אנו נדרשים לחשב את מהירות המפתח ברגע התפיסה. הכל נתון לנו עכשיו, כולל המהירות ההתחלתית. נשתמש בנוסחא למהירות בתאוצה קבועה (שהיא כמובן הנגזרת של נוסחת המיקום):

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{gt_1}{2} - gt_1 = \frac{y_1}{t_1} - \frac{gt_1}{2}$$

נציב מספרים ונקבל:

$$v(t_1) = \frac{4m}{1.5s} - \frac{10\frac{m}{s^2}1.5s}{2} = -\frac{29}{6}\frac{m}{s}$$

התוצאה השלילית בעצם מראה לנו שהשותפה תפסה את המפתח במהלך ירידתו ולא עלייתו (בדר"כ באמת יותר נוח לתפוס ככה).

שימו לב: כרגיל, המשכנו כמה שאפשר עם אותיות לפני הצבת המספרים. כולל בהצבה של v_0. גם אם בהתחלה זה לא נראה רלוונטי, זה בטוח יותר אלגנטי, וגם עוזר להבנה הפיסיקלית. במקרה שלפנינו, רואים למשל שהגבהת הגובה (y_1) תעלה את מהירות הזריקה ומהירות בתפיסה בדיוק באותה מידה.

מכונית מול אופניים

קודם כל נחליט על מערכת צירים. הבחירה הטריוויאלית היא שהאפס ברמזור, והכיוון החיובי בכיוון תנועת האופניים והמכונית.

האופניים נעות במהירות קבועה, עם מיקום התחלתי $x = 0$, ולכן המיקום שלהן יהיה:

$$x_{bicycle} = \int v dt = v_{bicycle} t$$

לעומתן, המכונית מאיצה בתאוצה קבוע, עם מיקום התחלתי $x = 0$, ומהירות התחלתית $v = 0$, ולכן התנועה שלה תתואר על ידי:

$$x_{car} = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2}$$

שאלו לאחר כמה זמן הם יפגשו, כלומר מתי המיקום שלהם יהיה זהה:

$$x_{car} - x_{bicycle} = 0$$

$$\frac{at^2}{2} - v_{bicycle} t = 0$$

$$\frac{a}{2} t \left(t - \frac{2}{a} v_{bicycle} \right) = 0$$

למשוואה זו יש שני פתרונות, ב$t = 0$, ישנו רגע שינוי הרמזור, בו המכונית והאופניים היו באותו המקום, והפתרון השני, אותו למעשה ביקשו, הוא:

$$t = \frac{2}{a} v_{bicycle} = \frac{2}{5\frac{m}{s^2}} \cdot 30 \frac{KM}{H} = \frac{2}{5\frac{m}{s^2}} \cdot 30 \frac{1000m}{3600s} = \frac{10}{3} s$$

בסעיף הבא מבקשים את המרחק בין נקודת העקיפה לנקודת ההתחלה של המכונית. בנקודת העקיפה המכונית והאופניים נמצאות באותו מקום, לכן ניתן להציב בשתי הנוסחאות. מטעמי פשטות נציב בנוסחא של האופניים לקבלת:

$$x_{bicycle} = v_{bicycle} t = \frac{2}{a} v_{bicycle}^2 = \frac{250}{9} m$$

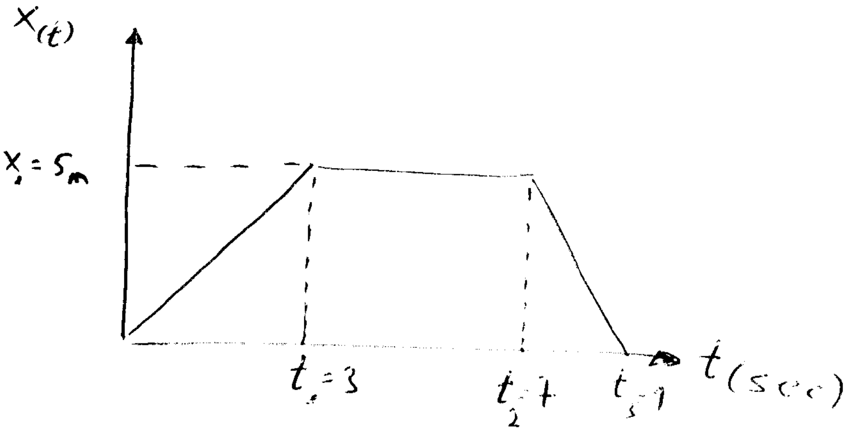
כרגיל, הקפדנו לשמור על האותיות עד הרגע האחרון.

תרגיל:

נתון גרף המתאר תנועה של גוף על ציר x

1) מצא/י את הפונ' $X_{(t)}$

2) צייר/י גרף את המהירות והתאוצה כפונ' של הזמן.



פתרון:

1) נחלק את הפתרון ל 3 תחומים (בזמן)

מאחר ו $X_{(t)}$ היא פונקציה רציפה מ 3 פונקציות

ליניאריות (קו ישר) השיפוע המיוצג ושיפוע הנקודה שונה!

$A \equiv$ שיפוע הגרף

$B \equiv$ חיתוך הגרף עם ציר y

משוואת קו ישר $y_{(x)} = Ax + B$

במקרה שלנו $y \to x_{(t)}$

$x \to t$

$X_{(t)} = At + B \Rightarrow X_{(t)} = Vt + X_0$ לכן

* יש לציין כי במקרה זה השיפוע/מהירות

קבועות ולכן התנועה לא מואצת בכל אחד מן התחומים.

(מה שלא עומד בקנה אחד עם המציאות).

תחום I :

$$0 \le t < t_1$$

$$x_{(t)} = Vt + x_0$$

(אין הסבר ב x) $x_0 = 0$ משום שב- $t=0$ אז $X=0$

$$\Downarrow$$

$$V_{(t)} = \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - 0}{t_1 - 0} = \frac{5}{3}\ \frac{m}{sec}$$

$$\Downarrow$$

$$X_{(t)} = \frac{5}{3} t$$

תחום II :

$$3 \le t < 7$$

נמצא את x_0 : $X_0 = 5_m$

$$\Downarrow$$

$$X_{(t)} = Vt + x_0 \Rightarrow V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5-5}{7-3} = 0$$

$$\Downarrow$$

(מנוחה) $X_{(t)} = 5_m$

תחום III :

$$7 \le t \le 9$$

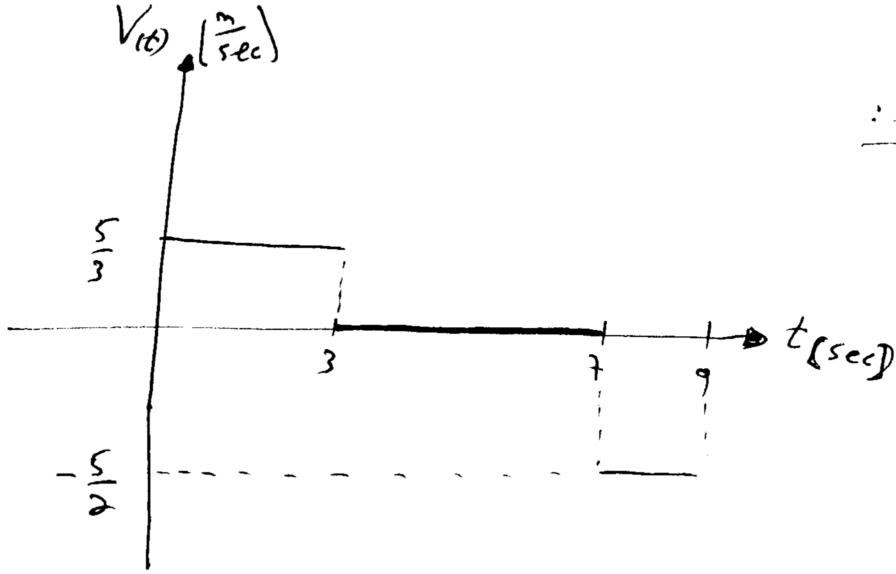
X_0 מצין שוב 5_m

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-5}{9-7} = -\frac{5}{2}\ \frac{m}{sec} \Rightarrow X_{(t)} = -\frac{5}{2} t + 5$$

נכנס את כל התחומים יחד :

$$X_{(t)} = \begin{cases} \frac{5}{3}t , & 0 \le t < 3 \\ 5 , & 3 \le t < 7 \\ -\frac{5}{2}t+5 , & 7 \le t \le 9 \end{cases}$$

2) מהירות :



תאוצה :

$$a_{(t)} = \frac{dv}{dt}$$

* המהירות קבועה בכל אחד מהתחומים

מה שגורר , $a_{(t)} = 0$

* יש לציין כי התאוצה לא מוגדרת כמו שצריך

בנק' $t=3$ ו $t=7$ משום שפונקציית

המהירות אינה רציפה בנקודות אלו.

1

243/40

תרגול 2 מבוא לפיזיקה 1

תנועה לאורך קו ישר

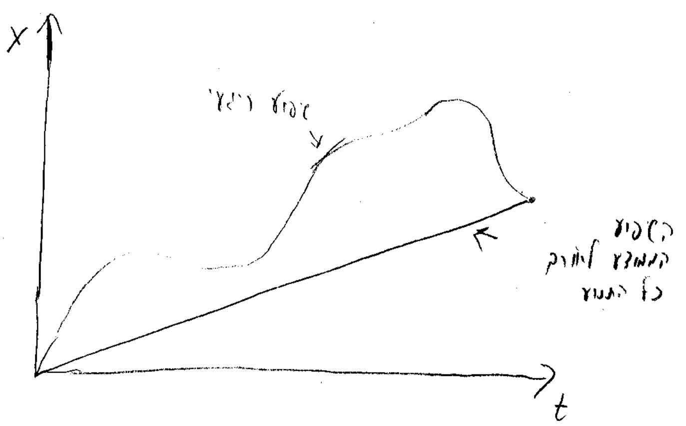
מהירות ממוצעת - המרחק שהגוף עבר בפרק זמן חלקי פרק הזמן

$$\langle \bar{V} \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

מהירות רגעית - כאשר מעוניינים לדעת מה המהירות ברגע מסוים או בנקודה מסוימת
במקרה זה נשאף להקטין את Δt ככל שניתן, כלומר נסתכל על הפרשי זמנים שואפים לאפס.

$$V_{\text{רגעי}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

נשים לב שקיבלנו שהמהירות היא השיפוע בגרף של x כפונקציה של t



(2)

1) תנועה של מטוס מתוארת ע"י המשוואה

$$X = 30m + 16\frac{m}{sec}\cdot t + 3\frac{m}{sec^2}\cdot t^2$$

א) מהי המהירות הממוצעת לאחר 2 דקות ?

ב) מהי המהירות הממוצעת בין הדקה הראשונה לשניה ?

ג) מהי המהירות הרגעית בזמן $t=30sec$

פתרון:

א)

$t_1 = 0$

$t_2 = 120sec$

$X_1 = 30$

$X_2 = 30m + 16\frac{m}{sec}\cdot 120sec + 3\frac{m}{sec^2}\cdot 120^2 sec^2 = 45150m$

$$\langle \bar{V} \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{45150m - 30m}{120sec} = 376\frac{m}{sec}$$

ב)

$t_1 = 60sec$

$t_2 = 120sec$

$X_1 = 11790$

$X_2 = 45150$

$$\langle \bar{V} \rangle = \frac{45150 - 11790}{60sec} = 556\frac{m}{sec}$$

ג)

I

$t_1 = 30sec$

$t_2 = 30.1sec$

$X_1 = 3210m$

$X_2 = 3229.63m$

$$V(t=30) = \frac{19.63}{0.01sec} = 196.3\frac{m}{sec}$$

II

$t_1 = 30sec$

$t_2 = 30.01sec$

$X_1 = 3210m$

$X_2 = 3211.9603m$

$$\bar{V}(t=30) = \frac{1.9603}{0.01sec} = 196.03\frac{m}{sec}$$

(3)

III תיאוק מדויק

$t_1 = t$

$t_2 = t + \Delta t$

$x_1 = 30 + 16t + 3t^2$

$x_2 = 30 + 16(t+\Delta t) + 3(t+\Delta t)^2 = 30 + 16t + 16\Delta t + 3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 16\Delta t + 6t\Delta t + 3\Delta t^2$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16\Delta t + 6t\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 16 + 6t + 3\Delta t = 16 + 6t$$

$$\bar{v}(t) = 16\frac{m}{sec} + 6\frac{m}{sec^2}t \quad \Rightarrow \quad V(t=30_{sec}) = 196\frac{m}{sec}$$

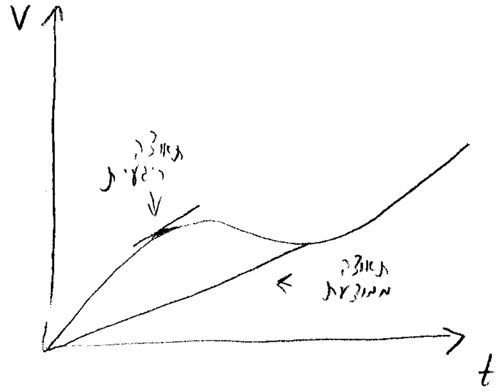
תאוצה ממוצעת - השינוי במהירות של גוף בפרק זמן לחלקי פרק הזמן

$$\langle \bar{a} \rangle = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

תאוצה רגעית - מסתכלים על הפרשי זמנים ששואפים לאפס

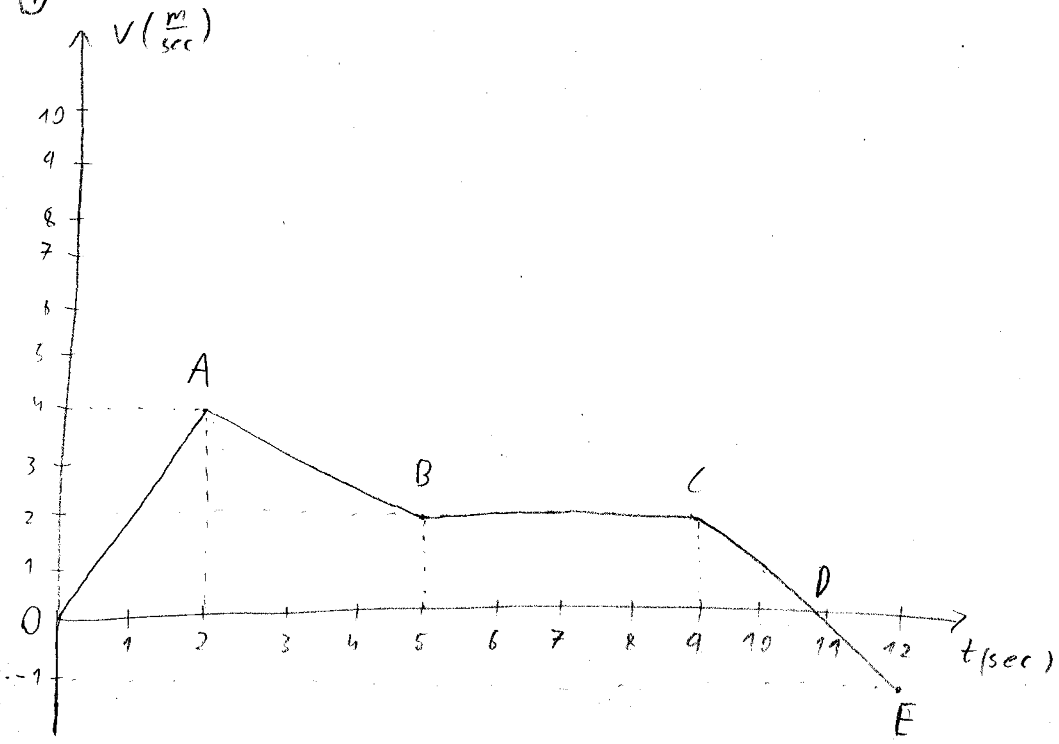
$$\bar{a}_{\text{רגעי}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

כמו במהירות קיבלנו שהתאוצה היא השיפוע בגרף של v כפונקציה של t



(4)

2) נתון הגרף הבא



א) תארו במילים את תנועת הגוף
ב) כתבו את משוואות עבור המהירות של הגוף
ג) מה המרחק עבר הגוף בכל התנועה?

פתרון:

א) בקטע OA הגוף מאיץ בתאוצה קבועה
בקטע AB הגוף מאט בתאוצה קבועה
בקטע BC הגוף נע במהירות קבועה.
בקטע CD הגוף מאט בתאוצה קבועה
בקטע DE הגוף מאיץ בתאוצה קבועה.

ב) נתחיל: מלמצוא את התאוצות ע״י מציאת השיפוע

$$a_{OA} = \frac{V_A - V_0}{t_A - t_0} = \frac{4\frac{m}{sec}}{2sec} = 2\frac{m}{sec^2}$$

$$a_{AB} = \frac{-2\frac{m}{sec}}{3sec} = -1.5\frac{m}{sec^2}$$

$$a_{BC} = 0$$

$$a_{CE} = \frac{-3\frac{m}{sec}}{3sec} = -1\frac{m}{sec^2}$$

⑤

קיבלנו תנועת שוות תאוצה בין המקטעים ולכן את המהירות נמצא ע"י המשוואה

$$V = V_0 + at$$

$V_{OA} = 2\frac{m}{sec^2}\cdot t$ $\quad 0 < t < 2$

$V_{AB} = 4\frac{m}{sec} - 1.5\frac{m}{sec^2}(t-2)$ $\quad 2 < t < 5$

$V_{BC} = 2\frac{m}{sec}$ $\quad 5 < t < 9$

$V_{CE} = 2\frac{m}{sec} - 1\frac{m}{sec^2}(t-9)$ $\quad 9 < t < 12$

ב) נשתמש בנוסחה

$$X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

עבור החלק OA

$X_0 = 0$
$V_0 = 0$
$a = 2\frac{m}{sec^2}$
$t = 2sec$

$\Rightarrow X = \frac{1}{2}\,2\frac{m}{sec^2}\cdot 4sec^2 = 4m$

עבור החלק AB

$X_0 = 4m$
$V_0 = 4\frac{m}{sec}$
$a = -\frac{3}{2}\frac{m}{sec^2}$
$t = 3sec$

$\Rightarrow X = 4 + 4\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,3^2 = \cancel{9.25m} = 16 - 3 = 13$

עבור BC

$X_0 = 9.25m$
$V_0 = 2\frac{m}{sec}$
$t = 4sec$
$a = 0$

$X = \cancel{9.25}^{\,12} + 2\cdot 4 = \cancel{17.25m} = \cancel{20}\ 21$

עבור CE

$X_0 = 17.25$
$V_0 = 2\frac{m}{sec}$
$a = -1\frac{m}{sec^2}$
$t = 3sec$

$X = 21 + 2\cdot 3 - \frac{1}{2}3^2 = 27 - 4.5 = 22.5$

3) מכונית נמצאת במרחק 50_m מהרמזור ובמהירות $V=12\frac{m}{sec}$ ידוע שהמכונית נע בתאוצה קבועה $a=5\frac{m}{sec^2}$.

א) מה תהיה מהירות המכונית במרחק $100m$ מהרמזור

ב) מאיזה מרחק התחילה המכונית את התנועה (כלומר $V=0$)

פתרון

א) נשתמש בנוסחה $V^2=V_0^2+2a(x-x_0)$

$$V^2=12^2+2\cdot5(100-50)=644\ \frac{m^2}{sec^2}$$

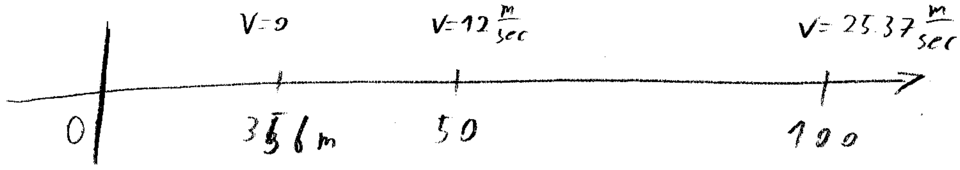
$$\Rightarrow V=\sqrt{644}\ \frac{m}{sec}=25.37\ \frac{m}{sec}$$

ב) נשתמש באותה נוסחה רק במקום לחפש את V נחפש את X_0

$V=12\frac{m}{sec}$

$X=50\frac{m}{sec}$ $\Rightarrow$ $12^2=2\cdot5(50-X_0)$

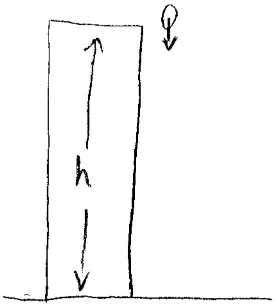
$V_0=0$ $\qquad \frac{144-500}{10}=-X_0 \Rightarrow X_0=35.6m$



7

נפילה חופשית

1) כדור מופל מבניין כעבור 8 שניות הכדור הגיע לתחתית הבניין
מה גובה הבניין? נתון $g=9.8\frac{m}{sec^2}$ כלפי מטה



פתרון: נכתוב את משוואת התנועה של הכדור

נבחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

נתון $v_0=0$ $y_0=h$

$$y(t=0) = h$$
$$y(t=8) = 0$$

$$0 = h - \frac{1}{2} g\, 8^2 \qquad h = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 64 = 313.6m$$

ענן בגובה קילומטר ממטיר שתי טיפות מים בהפרש של שנייה זו מזו. מה יהיה הפרש הזמנים בו הטיפות יפגעו בקרקע ומה יהיה המרחק בין הטיפות כשהטיפה הראשונה תפגע? נתון כי תאוצת הכובד g=10 m/s^2, הזניחו חיכוך עם האוויר.

א. הפרש הזמנים יהיה 1 שניות, המרחק יהיה 10 מטרים .
ב. הפרש הזמנים יהיה 14.142 שניות, המרחק יהיה 136 מטרים .
ג. הפרש הזמנים יהיה 1 שניות, המרחק יהיה 136 מטרים.
ד. הפרש הזמנים יהיה 1 שניות, המרחק יהיה 14.142 מטרים.

פתרון:

התשובה הנכונה היא ג.

מיקום הטיפה השנייה בעת פגיעה הטיפה הראשונה ניתן למציאה מהמשוואה: $y = y_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$,

כאשר נציב: $\begin{aligned} y &= 0[m] \\ y_0 &= 1000[m] \\ V_0 &= 0\left[{}^{m}\!/\!{}_{s}\right] \\ a &= -10\left[{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right] \end{aligned}$.

נפילת הטיפה הראשונה תארך: $T = \sqrt{\frac{2y_0}{a}} = \sqrt{200}[s]$, כשהטיפה הראשונה תפגע בקרקע הטיפה השנייה תהיה באוויר שנייה אחת פחות מהראשונה, לכן נוכל למצוא את גובהה על ידי ההצבה:

$y = y_0 + \frac{1}{2}a\left(\sqrt{T} - 1\right)^2 = 136[m]$, זהו גובה הטיפה השנייה מעל לקרקע.

תרגיל:

חלקיק נע לאורך ציר z פונקציית המיקום שלו נתונה ע"י: $z_{(t)} = 16te^{-t}\,[m]$

א) מהו מרחקו של החלקיק מהראשית כאשר הוא נעצר?

ב) באיזה זמן זה קורה?

פתרון:

החלקיק נעצר כאשר $V_{(t)}=0$

$$V_{(t)} = \frac{dz_{(t)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[16te^{-t}\right] = 16e^{-t} + 16t\left(-e^{-t}\right) =$$

$$= 16e^{-t}\left[1-t\right] \Longrightarrow \text{נשווה ל-0}$$

* קיבלנו 2 פתרונות

$$V_{(t)}=0 \begin{cases} t \to \infty \\ t = 1 \end{cases}$$

עבור $t \to \infty$:

$$z_{(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{16t}{e^{t}} = 0$$

עבור $t=1$:

$$z_{(t)} = \frac{16\cdot 1}{e^{1}} = \frac{16}{2.7} \simeq 5.9_{(m)}$$