

חלקיק בעולם התלת מימדי

הביטוי למיקום הוא :

$$\vec{r}(t) = A\hat{i} + Bt^2\hat{j} + Ct\hat{k}$$

המהירות היא:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 0 + 2Bt\hat{j} + C\hat{k}$$

התאוצה:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 0 + 2B\hat{j} + 0$$

המיקום בציר x הוא קבוע. בציר y יש תאוצה קבועה, ובציר z מהירות קבועה. הצורה של מסלול כזה היא פרבולה בצירי y ו z .

קינמטיקה

השלב הראשון הוא להגדיר מערכת צירים. בפתרון זה נבחר את הראשית בנקודת הזריקה, את כיוון y כלפי מעלה, ואת כיוון x ימינה.

את המהירות ההתחלתית נמיר לוקטור בצורה הבאה:

$$\vec{v}_0 = 25.3 \frac{m}{s} \cdot \begin{pmatrix} \cos(42^\circ) \\ \sin(42^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 18.8 \frac{m}{s} \\ 16.9 \frac{m}{s} \end{pmatrix}$$

תאוצת הנפילה החופשית במערכת הצירים שלנו היא:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -9.8 \frac{m}{s^2} \end{pmatrix}$$

ולכן, נוסחאות המהירות והמיקום כפונקציה של הזמן הן:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \approx \begin{pmatrix} 18.8 \frac{m}{s} \\ 16.9 \frac{m}{s} - 9.8 \frac{m}{s^2}t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \vec{a}\frac{t^2}{2} \approx \begin{pmatrix} 18.8 \frac{m}{s}t \\ 16.9 \frac{m}{s}t - 4.9 \frac{m}{s^2}t^2 \end{pmatrix}$$

1. כמה זמן נמצא הכדור באוויר בטרם הוא פוגע בקיר? נבדוק לפי נוסחת המיקום מתי הכדור נמצא במרחק האופקי המתאים לקיר.

$$x = 18.8 \frac{m}{s}t = 21.8m \Rightarrow t = \frac{21.8m}{18.8 \frac{m}{s}} \approx 1.16s$$

2. כמה גבוה מעל נקודת הזריקה יפגע הכדור בקיר? נציב את זמן הפגיעה שמצאנו בסעיף הקודם ברכיב האנכי של נוסחת המיקום.

$$y(t = 1.16s) = 16.9 \frac{m}{s} \cdot 1.16s - 4.9 \frac{m}{s^2} (1.16s)^2 \approx 13.0m$$

3. מהו וקטור מהירות הכדור ברגע הפגיעה בקיר? נציב את זמן הפגיעה בנוסחה הכללית שמצאנו למהירות.

$$\vec{v}(t = 1.16s) = \begin{pmatrix} 18.8 \frac{m}{s} \\ 16.9 \frac{m}{s} - 9.8 \frac{m}{s^2} (1.16s) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 18.8 \frac{m}{s} \\ 5.5 \frac{m}{s} \end{pmatrix}$$

4. האם הכדור עבר את נקודת שיא הגובה ברגע הפגיעה? מכיוון שרכיב המהירות בציר y שקיבלנו בסעיף הקודם חיובי, הכדור עודנו בתנועתו מעלה, ולא עבר את שיא הגובה.

קליעה לחישוק

נסמן:

$$v_0 = 10.8 \frac{m}{s}$$

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

$$h = 4.9m$$

$$u = 9.1 \frac{m}{s}$$

נבחר מערכת קואורדינטות, אשר הראשית שלה בנקודת הזריקה, ציר x ימינה, וציר y כלפי מעלה. נרשום במערכת זו את נקודת הזריקה והמהירות ההתחלתית:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

במציאת המהירות ההתחלתית התחשבנו בכך שמהירות הכדור ניתנה לנו ביחס לאדם הזורק, ובנוסף פירקנו את המהירות לרכיבים כמקובל. מרגע העזיבה, התנועה היא בתאוצה קבועה, ולכן:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t \end{aligned}$$

ביקשו מאיתנו את המרחק האופקי עד הזריקה, אבל על מנת לקבלו אנחנו נדרשים לחשב את הזווית α ואת הזמן עד הפגיעה בחישוק. הדרישה היא שהחישוק יעבור בגובה מסוים, ובאופן אופקי. הכוונה באופקי היא שהמהירות בציר y היא אפס. נשארנו עם שתי משוואות וקטוריות:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1) &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \frac{t_1^2}{2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ h \end{pmatrix} \\ \vec{v}(t_1) &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha + u \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נציב את $v_0 \sin \alpha$ מהמשוואה של המהירות במשוואה של המיקום לקבלת:

$$gt_1^2 - g \frac{t_1^2}{2} = h$$

$$t_1 = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\sin \alpha = \frac{gt_1}{v_0} = \sqrt{\frac{2hg}{v_0^2}}$$

$$x_1 = (v_0 \cos \alpha + u)t_1 = u \sqrt{\frac{2h}{g}} + v_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} t_1 = u \sqrt{\frac{2h}{g}} + v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \sqrt{1 - \frac{2hg}{v_0^2}} \approx 13.64m$$

פתרון תרגיל 1_2406

השלג יורד בכיוון האנכי כלפי מטה, וקטור המהירות שלו

$$v_{sg} = (0, -0.8) \text{ m/s} \text{ : ביחס לאדמה:}$$

המהירות של המכונית ביחס לאדמה:

$$v_{cg} = (80, 0) \text{ km/h} = (22.2, 0) \text{ m/s}$$

המהירות של השלג ביחס למכונית:

$$v_{sc} = v_{sg} - v_{cg} = (-22.2, -0.8) \text{ m/s}$$

הזווית של הוקטור:

$$\alpha = \arctan[(-0.8)/(-22.2)] = 2^\circ$$

