הבן הגדול

קודם נחשב את מומנט ההתמד סביב הקצה בעזרת שטיינר:

$$I = I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

עכשיו נוכל לרשום:

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

המחוגים משלימים 2π ראדיאנים בסיבוב, ולכן מהירותם הזוויתית:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

כש T זה זמן הסיבוב של כל אחד מהמחוגים. לכן הביטוי לאנרגיה הוא:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\frac{m_1L_1^2}{3}\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2L_2^2}{3}\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \\ &= \frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{m_1L_1^2}{T_1^2} + \frac{m_2L_2^2}{T_2^2}\right) \end{aligned}$$

הנתונים שלנו במלואם, ביחידות הנכונות, (בשימוש בזה שהמחוג הקצר מקיף סיבוב ב12 שעות, והגדול בשעה):

$$\begin{aligned} m_1 &= 60kg \\ L_1 &= 2.7m \\ T_1 &= 60\text{min} = 3600s \\ m_2 &= 100kg \\ L_2 &= 4.5m \\ T_2 &= 12\text{Hours} = 12H \cdot 60\frac{m}{H} \cdot 60\frac{s}{m} = 43200s \end{aligned}$$

לכן האנרגיה:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{m_1L_1^2}{T_1^2} + \frac{m_2L_2^2}{T_2^2}\right) \\ &= \frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{60kg(2.7m)^2}{(3600s)^2} + \frac{100kg(4.5m)^2}{(43200s)^2}\right) \\ &\approx \frac{2\pi^2}{3}\left(3.375 \times 10^{-5} + 1.09 \times 10^{-6}\right) J \\ &\approx 2.3 \times 10^{-4} J \end{aligned}$$

שימו לב שכמעט כל האנרגיה מגיעה ממחוג הדקות, וזה כי הוא מסתובב פי 12 יותר מהר.

קליפה וגלגלת

בדרך כלל (אבל ממש לא תמיד), אם שאלות מבקשות תאוצה, צריך לחשב כוחות. ואם הן מבקשות מהירות, הדרך היא אנרגיה. אם נקבע את גובה היחוס במיקום העכשווי של הקופסא הירוקה, אז בתחילת התנועה האנרגיה היא אפס. מכיוון שצירי הגלגלות לא זזים, הגלגלות אינן מבצעות עבודה (על אף שהן מפעילות כוח). אם כך האנרגיה אחרי גובה h צריכה להיות זהה לאנרגיה בתחילה, 0.

$$0 = -m_2gh + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

העניין הוא שמכיוון שאין החלקה בגלגלות, יש קשר בין מהירותן הזוויתית לבין מהירות החבל:

$$\omega_1 \cdot R = v_2$$

וגם:

$$\omega_2 \cdot r_2 = v_2$$

לכן נוכל לרשום את משוואת שימור האנרגיה כך:

$$\begin{aligned} 2m_2gh &= m_2v_2^2 + I_1\left(\frac{v_2}{R}\right)^2 + I_2\left(\frac{v_2}{r_2}\right)^2 \\ 2gh &= v_2^2 + \frac{I_1}{m_2R^2}v_2^2 + \frac{I_2}{m_2r_2^2}v_2^2 \\ v_2^2 &= \frac{2gh}{1 + \frac{I_1}{m_2R^2} + \frac{I_2}{m_2r_2^2}} \end{aligned}$$

בשביל התאוצה, נצטרך לחשב כוחות ומומנטים. נסמן את החבל האנכי בT_2, ואת החבל האופקי בT_1. נרשום את החוק השני של ניוטון לשלושת הגופים. על הגוף הירוק נקבל:

$$m_2g - T_2 = m_2a_2$$

על הגלגלת הכחולה נחשב מומנטים, ונקבל:

$$T_2r_2 - T_1r_2 = I_2\alpha_2$$

ועל הקליפה האפורה:

$$T_1R = I_1\alpha_1$$

מכיוון שאין החלקה, והקשר בין המהירויות שמצאנו קודם נשמר תמיד, ניתן לגזור אותו ולקבל קשר בין התאוצות הזוויתיות לקוויות:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_2}{R} \\ \alpha_2 &= \frac{a_2}{r_2} \end{aligned}$$

כך שסט המשוואות שקיבלנו מהחוק השני הוא:

$$\begin{aligned} m_2g - T_2 &= m_2a_2 \\ T_2r_2 - T_1r_2 &= I_2\frac{a_2}{r_2} \\ T_1R &= I_1\frac{a_2}{R} \end{aligned}$$

קצת סדר באלגברה:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{1}$$
$$T_2 - T_1 = I_2 \frac{a_2}{r_2^2} \tag{2}$$
$$T_1 = I_1 \frac{a_2}{R^2} \tag{3}$$

ועכשיו נחבר את שלושת המשוואות יחד:

$$m_2 g - T_2 + T_2 - T_1 + T_1 = m_2 a_2 + \frac{I_2}{r_2^2} a_2 + \frac{I_1}{R^2} a_2$$
$$a_2 = \frac{g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

וזו התאוצה. שימו לב שאם לגלגלות לא הייתה מסה, היינו מקבלים שהגוף נופל בתאוצה הכובד, אבל מכיוון שיש להן מסה הוא נופל לאט יותר.

בקשר למתיחויות, פשוט צריך לעבוד עם סט המשוואות שכבר היה לנו. המתיחות בחבל האופקי ניתנת על ידי משוואה (3)

$$T_1 = \frac{I_1}{R^2} a_2 = \frac{I_1}{R^2} \frac{g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

והחבל האנכי ממשוואה (1)

$$T_2 = m_2 g - m_2 a_2 = m_2 g - \frac{m_2 g}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}} = \frac{m_2 g \left(\frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2} \right)}{1 + \frac{I_2}{m_2 r_2^2} + \frac{I_1}{m_2 R^2}}$$

בקשר למומנטי ההתמד, מומנט ההתמד של הקליפה הוא:

$$I_1 = \frac{2}{3} m_1 R^2$$

ואת מומנט ההתמד של הגלגלת נחבר מספר מומנטי התמד של דיסקאות:

$$I_2 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 r_2^2$$

שני כדורים מחוברים

התנע הזוויתי והתנע הקווי נשמרים. מכיוון שזו התנגשות אלסטית גם האנרגיה נשמרת. בקשר לתנע הקווי, בגוף קשיח מתייחסים לתנע הקווי של מרכז המסה. בנוסף, מכיוון שהמפגש הוא על ציר x, נניח שמרכז המסה נע גם כן רק בציר x. נבחר כציר עבור התנע הזוויתי את מרכז המסה של המוט, וביחס לציר זה המרחק האופקי של הגוף השלישי לפני ההתנגשות הוא $\frac{L}{2\sqrt{2}}$. נסמן את מהירות מרכז המסה ב v_{cm}, ואת מהירות הגוף הנוסף לאחר ההתנגשות בu. נקבל שלוש משוואות (תנע, תנע זוויתי ואנרגיה בהתאמה):

$$mv_0 = mu + 2mv_{cm} \tag{1}$$

$$mv_0\frac{L}{2\sqrt{2}} = mu\frac{L}{2\sqrt{2}} + I\omega \tag{2}$$

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{u^2}{2} + 2m\frac{v_{cm}^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} \tag{3}$$

נשתמש במשוואת התנע הקווי (1) על מנת לבטא את u:

$$u = v_0 - 2v_{cm}$$

נציב את זה בביטויים של התנע הזוויתי והאנרגיה (תוך כדי סידור קל של האלגברה):

$$v_0 = (v_0 - 2v_{cm}) + \frac{2\sqrt{2}}{mL}I\omega$$
$$v_0^2 = (v_0 - 2v_{cm})^2 + 2v_{cm}^2 + \frac{I}{m}\omega^2$$

עוד קצת ארגון אלגברי יתן:

$$v_{cm} = \frac{\sqrt{2}I}{mL}\omega$$
$$0 = 6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\omega^2$$

ועכשיו ניתן להציב את המהירות הזוויתית מהמשוואה הראשונה בשניה לקבלת:

$$6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\left(\frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm}\right)^2 = 0$$
$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2I}v_{cm} - 4v_0\right) = 0$$

מומנט ההתמד של שני כדורים זהים במרחק L ביחס למרכז המסה שלהם הוא:

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

נציב את זה בביטוי שקיבלנו למהירות מרכז המסה:

$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2\cdot\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} - 4v_0\right) = v_{cm}(7v_{cm} - 4v_0) = 0$$

מה שמשאיר שתי פתרונות. אחד הוא שמרכז המסה לא זז, והכדור נשאר במהירותו ההתחלתית, כלומר הוא בעצם חולף דרך הכדורים המחוברים. האופציה השניה (שבאמת מתארת התנגשות) היא ש:

$$v_{cm} = \frac{4}{7}v_0$$
$$\omega = \frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm} = \frac{mL}{\sqrt{2}\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{v_{cm}}{L} = \frac{4}{7\sqrt{2}}\frac{v_0}{L}$$
$$u = v_0 - 2v_{cm} = v_0 - 2\cdot\frac{4}{7}v_0 = -\frac{1}{7}v_0$$

אספקת חמצן

לכל אורך התנועה, אין כוחות או מומנטים חיצוניים, ולכן התנע הקווי והתנע הזוויתי נשמרים. נקבע את נקודת היחוס שלנו למרכז המסה של מערכת שתי החלליות המחוברות. על מנת למצוא את התנע הזוויתי לפני המפגש ביחס לנקודה זו, צריך למצוא את המרחק האופקי בין נקודה זו לחללית. נחשב את מרחק מרכז המסה מהחללית בעת המפגש:

$$X_cm = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{m_2 D}{m_1 + m_2}$$

עכשיו נחשב את התנע הזוויתי ביחס למרכז המסה לפני המפגש:

$$L_i = m_1 v \frac{m_2 D}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2 v D}{m_1 + m_2}$$

מכיוון שהתנע הזוויתי נשמר, זה שווה לתנע הזוויתי של אחרי המפגש:

$$L_f = I\omega = L_i$$

$$\omega = \frac{L_i}{I} = \frac{m_1 m_2 v D}{(m_1 + m_2) I}$$

צריך לחשב את מומנט ההתמד של שתי המסות ביחס למרכז המסה:

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 \left(\frac{m_2 D}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 D}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} D^2$$

ונציב את זה בביטוי למהירות הזוויתית:

$$\omega = \frac{m_1 m_2 v D}{(m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} D^2\right)} = \frac{v}{D}$$

עכשיו שואלים האם אנרגיה נשמרה. לפני המפגש הייתה אנרגיה קינטית קווית בלבד:

$$E_i = \frac{m_1 v^2}{2}$$

עכשיו יש אנרגיה קווית של מרכז המסה ואנרגיה סיבובית של הסיבוב סביב מרכז המסה. נחשב קודם כל את מהירות מרכז המסה משיקולי שימור תנע קווי:

$$p_f = (m_1 + m_2) v_{cm} = p_i = m_1 v$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$$

ועכשיו נוכל למצוא את האנרגיה:

$$\begin{aligned}
E_f &= \frac{I\omega^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2) v_{cm}^2}{2} \\
&= \frac{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} D^2 \omega^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{m_1 m_2 D^2 \left(\frac{v}{D}\right)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1^2 v^2}{2\,(m_1 + m_2)} \\
&= \frac{m_1 (m_2 + m_1) v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} = E_i
\end{aligned}$$

כלומר ראינו שהאנרגיה נשמרה בהתנגשות.

עכשיו מושכים את מוט התדלוק לתוך חללית המחקר ומקצרים את המרחק ל $\frac{D}{2}$. מכיוון שהכוחות שמבצעים את זה הם פנימיים, הם אינם יכולים לשנות את התנע הזוויתי של המערכת. אם התנע הזוויתי נשמר, אז ההבדל במהירות הזוויתית נובע מהשינוי בI. נסמן בI_2 את מומנט ההתמד החדש:

$$I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}I$$

לכן המהירות הזוויתית:

$$I\omega = I_2\omega_2$$

$$\omega_2 = fracII_2\omega = 4\omega$$

המהירות הזוויתית גדלה פי ארבע.

כדי לבדוק כמה אנרגיה היה צריך להשפיע, נחסר מהאנרגיה אחרי הכיווץ את האנרגיה לפני:

$$\begin{aligned} W = \Delta E &= \left[\frac{(m_1+m_2)v_{cm}^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}\right[- \left[\frac{(m_1+m_2)v_{cm}^2}{2} + \frac{I\omega}{2}\right] \\ &= \frac{I_2\omega_2^2 - I\omega^2}{2} = \frac{\frac{1}{4}I(4\omega)^2 - I\omega^2}{2} = \frac{4-1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{3}{2}I\omega^2 = 3\frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1+m_2)} \end{aligned}$$

שימו לב שקיבלנו שהיה צריך להשקיע אנרגיה חיובית. זה אומר שהיה קשה לבצע את זה. עכשיו נסו לדמיין עצמכם בחללית, מחוברים לחללית אחרת בעודכם מסתובבים כגוף אחד. מה יותר קשה, למשוך את החללית האחרת אליכם או לשחרר את המוט ולהרחיק את החללית האחרת?