

מבחן במבוא לכבידה

משך המבחן שלוש שעות בלבד. יש לענות על כל השאלות.
מספר הנקודות המוענק עבור תשובה נכונה מצויין בסוגריים ליד כל סעיף.

בהצלחה!

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. מצורפים דפי נוסחאות.

1.

השאלה עוסקת בגבול הניוטוני של מערכת מסתובבת.

המטריקה של מערכת מסתובבת במרחב שטוח נתונה ע"י:

$$ds^2 = -\left[1 - \Omega^2(x^2 + z^2)\right]dt^2 + 2\Omega(zdx - xdz)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(5) א. מהו ציר הסיבוב של המערכת? נמקו את תשובתכם.

(10) ב. חשבו את סמלי קריסטופל של המטריקה בקואורדינטות קרטזיות.

(10) ג. רשמו את המשוואות הגאודזיות במרחב זה בקואורדינטות קרטזיות.

(15) ד. הראו במפורש כי בגבול הלא יחסותי, המשוואות מסעיף ג' מתארות גוף שעליו פועלים כוחות צנטריפוגליים וכוח קוריאוליס.

2.

השאלה עוסקת במסלול קרני אור בקרבת חור שחור.

(5) א. מצאו ביטוי לגדלים השמורים e , האנרגיה ליחידת מסה ו l , התנע הזוויתי ליחידת מסה עבור מסלולי אור בגאומטריית שוורצשילד.

(5) ב. הגדירו את פרמטר הפגיעה b , $b^2 = l^2/e^2$, והראו כי

$$\frac{1}{l^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) = \frac{1}{b^2}$$

(15) ג. צופה משגר אלומת אור מעגלית ברדיוס a המכוונת למרכזו של חור שחור (גיאומטריית שוורצשילד) שמסתו M . כמה מהאור יבלע בחור כפונקציה של a ?

(5) ד. הראו כי זווית ההטיה בגאומטריית שוורצשילד מקיימת

$$\Delta\phi = \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \right)^{-1/2}$$

הגדירו את r_1 .

(10) ה. האם ייתכן שאל הצופה ששיגר את אלומת האור מסעיף ג' יוחזר אור מהחור השחור? אם כן, באילו תנאים? ואם לא, מדוע? נמקו את תשובתכם בעזרת חישוב.

3.

השאלה עוסקת בטנזור התנע-אנרגיה של זורם.

$$T^{\mu\nu} = \rho(x)u^\mu u^\nu$$

נתון ע"י

(10) א. ניתן לחשב את טנזור התנע-אנרגיה עבור התפלגות רציפה של חומר (זורם) בעל צפיפות מסה ρ וארבע-מהירות $u^\mu(x)$, המקיימת $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$. מצאו ביטוי לטנזור הנ"ל במערכת בה לזורם ווקטור מהירות מרחבית V^i . מה המשמעות של רכיבי הטנזור?

(15) ב. הראו כי מחוק השימור $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ נובע כי זרם המסה $j^\mu = \rho u^\mu$ נשמר וכי אלמנט זורם נע על עקומה גאודזית.

(10) ג. כאשר הלחץ לא מתאפס טנזור התנע-אנרגיה נתון ע"י $T^{\mu\nu} = \rho(x)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}$. מצאו ביטוי לטנזור הנ"ל במערכת בה לזורם ווקטור מהירות מרחבית V^i . מה המשמעות של רכיבי הטנזור?

(15) ד. מצאו את המשוואות הנובעות מחוק השימור $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. הסבירו מדוע בגבול הניוטוני

$$v \frac{dp}{dt} \ll |\nabla p|, p \ll \rho \quad u^\mu = (1, v^i)$$