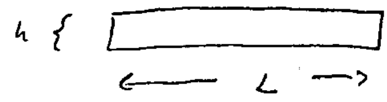
1.3.05

יחסות
תרגול

$$\det A = e^{Tr \ln A}$$

תרגול

למצוא Γ של רצועת מוביוס.



וקטור שינוע של הרצועה בלי להשתנות יראה לצופה מבחוץ כאילו התהפך בציר y.

נבחר וקטור: $\vec{a} = (0, a)$

$$\Delta \vec{a} = (0, -2a)$$

כדי לקבל את השינוי נבצע אינטגרציה על הנגזרת:

$$\Delta a^{\nu} = \int \nabla_{\mu} a^{\nu} dl^{\mu}$$

$$dl^{\mu} = (dx, 0)$$

כאשר מעניין אותנו רק השינוי ברכיב y: $\nu = 2$

$$\nabla_1 \vec{a} = \cancel{\partial_1 \vec{a}} + \Gamma^{2}_{12} a^{2}$$

a לא תלוי מפורש בקורדינטות.

קבוע על הרצועה, אין נק' מיוחדת עליה.

$$\Delta a^{\nu} = L \cdot \Gamma^{2}_{12} a \longrightarrow \Gamma^{2}_{12} = -\frac{2}{L} \neq \Gamma^{2}_{21} = 0$$

אי-קיום הסימטריה מספיק כדי לטעון שאין לרצועת מוביוס מטריקה!

$$T^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$$

פיתול המרחב:
~~[illegible]~~ מתאפס במרחבים שטוחים

<u>לכסון מטריקה:</u>
נתונה המטריקה:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} + 2a^2(t)\, dx\, dy$$

נעבור קואורדינטות:

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$$

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + (1+a^2(t))\, du^2 + (1-a^2(t))\, dv^2$$

ואז המטריקה אלכסונית.

<u>חישוב שטחים:</u>

$$J = \sqrt{|g|}$$ יעקוביאן:

$$J = \det\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\beta}}\right)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} dx^{\mu}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} dx^{\nu}\right)$$

$$\det g_{\mu\nu} = g$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \tilde{x}^{\nu}}$$

תלוי במספר מימדי הזמן.

$$g = (\pm 1)\, J^2 \quad \rightarrow \quad J = \sqrt{|g|}$$

3.3.05

יחסות
תרגול

טנזור רימן

מס' האיברים הבלתי תלויים בטנזור רימן ב-n מימדים:

$$\frac{1}{12}n^2(n^2-1)=D$$

למשל אם $n=2$ אז $D=1$, והאיבר הב"ת היחיד הוא R_{1212}.

טנזור ריצ'י, וויל

טרנס' קונפורמית: $\tilde{g}_{\mu\nu}=\Omega^2 g_{\mu\nu}$

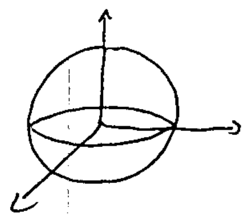
ב-3 מימדים (וב-2) אין דיפורמציה של חלקיקי בוחן.

$$x^\mu=(t,x,y)$$

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

שאלה מהתרגיל - 2 ג'

נבחר תנאי התחלה:



$$\theta(0)=\pi/2$$
$$\theta'(0)=0$$

$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2=$$
$$=d\varphi^2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds}=1$$

$$T^\mu:\quad T^\theta=\frac{d\theta}{ds}=0$$
$$T^\varphi=\frac{d\varphi}{ds}=1$$

סטייה בכיוון הג'אודזי הנו חסר משמעות. הסטייה היחידה היא בכיוון ניצב.

$$S^\theta = ?$$
$$S^\varphi = 0$$

$$D_T S^\theta = T^\mu D_\mu S^\theta = T^\varphi D_\varphi S^\theta = \partial_\varphi S^\theta + \underbrace{\cancel{\Gamma^\theta_{\varphi\theta}}}_{0} S^\theta = \partial_\varphi S^\theta$$

$$D_T^2 S^\theta = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 S_\theta$$

$$D_T^2 S^\lambda = R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} T^\mu T^\nu S^\sigma$$

$$\lambda = \theta$$
$$\mu = \nu = \varphi$$
$$\sigma = \theta$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 S^\theta = R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} S^\theta$$

$$// R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} = -\sin^2\theta = -1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 S^\theta = -S^\theta$$

$$\Downarrow$$

$$S^\theta = S_0 \sin(\varphi - \varphi_0)$$

Rindler Space / Horizon   מרחב רינדלר

זהו מרחב תאוצה קבועה.

$$ds^2 - dt^2 + dx^2$$

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2$$

$$\frac{dx}{d\tau} = at$$

$$1 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}_{= a^2t^2}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1 + a^2t^2$$

$$\int d\tau = \int \frac{dt}{\sqrt{1+a^2t^2}} =$$

$$t = \frac{1}{a}\sinh\theta$$ נשתמש בהצבה:

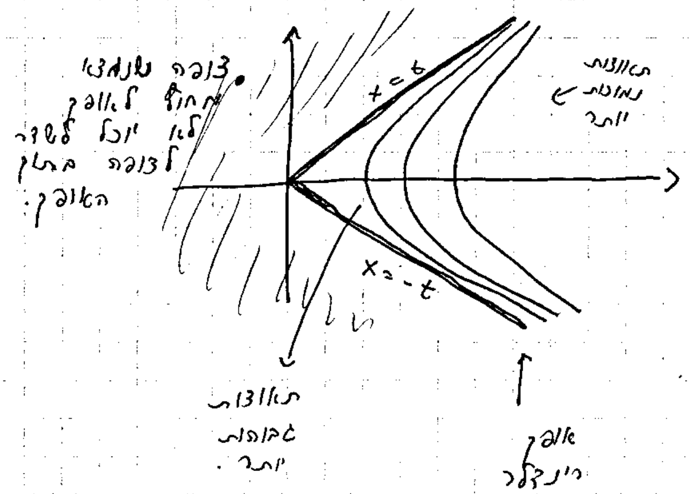
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cancel{\cosh}\,\theta\, d\theta}{\cancel{\cosh}\,\theta} = \frac{\theta}{a}$$

$$t = \frac{1}{a}\sinh a\tau$$

$$x = \int \sinh a\tau\, d\tau = \frac{1}{a}\cosh a\tau$$

כך צופה מבחוץ יראה גוף שנע בתאוצה קבועה:

$$X^2 = \frac{1}{a^2} + t^2$$



החלפת משתנים:

$$\xi = a\tau$$

$$\eta = \frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} t = \eta \sinh \xi \\ x = \eta \cosh \xi \end{cases}$$

$$ds^2 = -(d\eta \sinh \xi + \eta \cosh \xi \, d\xi)^2 + (d\eta \cosh \xi + \eta \sinh \xi \, d\xi)^2 =$$

$$\boxed{ds^2 = -\eta^2 d\xi^2 + d\eta^2}$$

זוהי מטריקת רינדלר.

17.3.05 יחסות כללית

פתרון ש' 4 תרגיל 1:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2a^2(t)\,dx\,dy$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2(t) & 0 \\ 0 & a^2(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריקה:

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$$

$$ds^2 = -dt^2 + (1+a^2(t))du^2 + (1-a^2(t))dv^2 + dz^2$$

נמצא את שטח המעגל:

$$S = \int_{\text{מעגל}} J\,du\,dv \qquad // \; J = \sqrt{|g|}$$

בגלל ש $0 = dt = dz$ אז המעגל, ~~מצא~~ צריך לחשב את הדטרמיננטה של g המצומצם;

$$\sqrt{|{}^{(2)}g|} = \sqrt{(1-a^2)(1+a^2)} = \sqrt{1-a^4(t)}$$

$$S = \pi R^2 \sqrt{1-a^4}$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = \frac{2a^2(t)\left[(-3+a^4)\dot{a}^2 + a\ddot{a}(-1+a^4)\right]}{(-1+a^4)^2} = -R_{00} + \frac{1}{2}(R_{11}+R_{22})$$

ב. אורך אלכסון אחד יהיה תלוי רק ב-u או
רק ב-v:

$$D_1 = \int_{-R}^{R} \sqrt{1+a^2(t)}\, du = 2R\sqrt{1+a^2}$$

$$D_2 = 2R\sqrt{1-a^2}$$

<u>הערות לגבי התרגיל השני:</u>

נתון:
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{r}} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

המשוואה יתן: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 0$

לחשב במשוואה עד הכריסטופלים ואח"כ לחשב ישירות.

$$\begin{pmatrix} M\delta(r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה הבאה</u>: $S_M = \int \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\, dV$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} F_{\mu\lambda} F_{\nu\sigma}$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p$$

עבור גז לא יחסותי מתקיים: $u^\mu = (1,0,0,0)$

עבור קרינה:
$p = \frac{1}{3}\rho$

$\frac{1}{2}(E^2+B^2)=\rho$
$E_1 = E_2 = E_3$

מומלץ לחשב T^μ_ν בקו' מעורבות כי אז $g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$.

יחסות
תרגול

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$$

$$\delta S_M = -\frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x =$$

$$//\ \delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu$$

$$= \frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}(\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu)\sqrt{-g}\,d^4x = \int T^{\mu\nu}\,\nabla_\nu \xi_\mu \sqrt{-g}\,d^4x =$$

$$= \int\left[\nabla_\nu(T^{\mu\nu}\xi_\mu) - \xi_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\,d^4x =$$

$$//\ \int \nabla_\nu(T^{\mu\nu}\xi_\mu)\sqrt{-g}\,d^4x = \quad //\ \nabla_\nu V^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}\,V^\nu)$$

$$= \int \partial_\nu(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\xi_\mu)\,d^4x$$

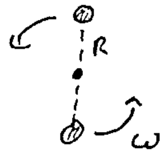
$$= -\int \xi_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x$$

$$\Downarrow$$

ξ_μ יכול להיות כל דבר ולכן $\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0$

תרגיל

נניח מערכת בינארית:



קו' גליליות.

(1) צפיפות אנרגי' הכוכבים

$$T^{00} = m\,\delta(r-R)\,\delta(z)\,\delta[(\theta-\omega t)R] + m\,\delta(r-R)\,\delta(z)\,\delta[(\theta-\omega t+\pi)R]$$

T^{i0} הוא שטף התנע. במקרה הזה היחיד הוא בכיוון θ.

(2) $$T^{20} = mv\,\delta(r-R)\,\delta(z)\,\delta\left[R(\theta-\omega t)\right] + mv\,\delta(r-R)\,\delta(z)\,\delta\left[R(\theta-\omega t+\pi)\right]$$

$$v = \omega r$$

$$T^{00}{}_{,0} + T^{20}{}_{,2} = 0$$ מתוך (1) ו-(2) נקבל:

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{00} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} T^{20} = 0$$

הגדרות:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_+ & C_\times & 0 \\ 0 & C_\times & -C_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{i\omega(z-t)}$$

$$\ddot{S}^\mu = \underbrace{\tfrac{1}{2}\ddot{h}^\mu{}_\nu}_{R^\mu{}_{00\mu}} S^\nu$$

__עבור + קיבלנו:__

$$S^1 = S^1_0 + \tfrac{1}{2} S^1_0 C_+ e^{i\omega(z-t)}$$

$$S^2 = S^2_0 - \tfrac{1}{2} S^2_0 C_+ e^{i\omega(z-t)}$$

$$\frac{S^1}{S^2} = \frac{S^1_0}{S^2_0}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}C_+ e^{i\omega(z-t)}}{1-\frac{1}{2}C_+ e^{i\omega(z-t)}} \approx \frac{S^1_0}{S^2_0}\left(1 + C_+ e^{i\omega(z-t)}\right)$$

$$\partial_t^2\left(\frac{S^1}{S^2}\right) = \frac{S^1_0}{S^2_0}\left(-\omega^2 C_+ e^{i\omega(z-t)}\right) = \frac{S^1_0}{S^2_0}\ddot{h}^1{}_1 = \frac{S^1_0}{S^2_0} R^1{}_{001} = \frac{S^1_0}{S^2_0} C^1{}_{001}$$

$$/\!/\; R_{\mu\nu} = 0 \qquad C^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} = R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$$

עבור X נקבל :

$$C_+=0\ ,\ X\ :\qquad \ddot{S}^1=\frac{1}{2}\ddot{h}^1{}_2 S^2$$

$$\ddot{S}^2=\frac{1}{2}\ddot{h}^2{}_1 S^1$$

$$S^1=S^1_0+\frac{1}{2}\int_0^t dt\int_0^t dt\ \ddot{h}^1{}_2 S^2 \quad =$$

בקירוב ראשון : $S^2\approx S^2_0$

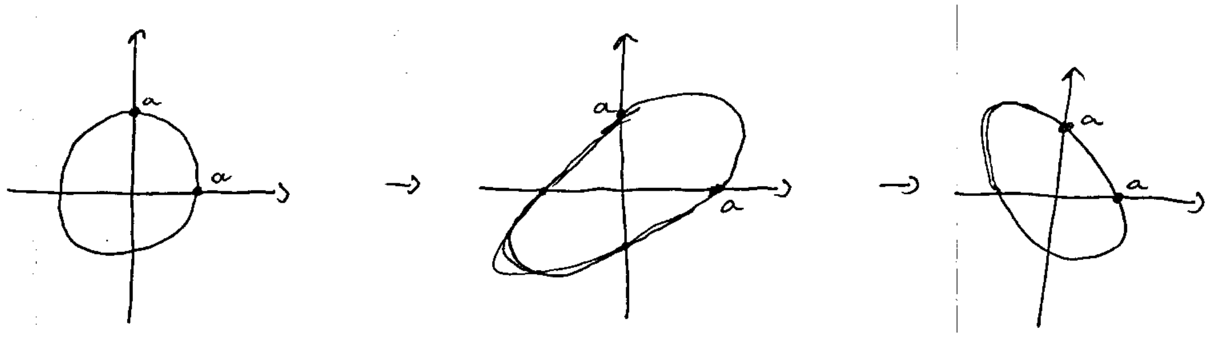
$$=\frac{1}{2}S^2_0\int dt\int dt\ \ddot{h}^1{}_2+S^1_0$$

$$S^1\approx S^1_0+\frac{1}{2}S^2_0 h^1{}_2=S^1_0+\frac{1}{2}S^2_0 C_x e^{i\omega(z-t)}$$

$$S^2=S^2_0+\frac{1}{2}S^1_0 C_x e^{i\omega(z-t)}$$

באותו אופן :

והאוסף ינוע :



$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$R^{(1)}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}=0 \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mu\nu}=0$$

$$T^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G_N} G^{(2)}_{\mu\nu}$$

$R^{(0)}=0$ במטריקה שטוחה

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G_N}\left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(g^{(0)}_{\mu\nu} R^{(2)} + g^{(1)}_{\mu\nu}\cancel{R^{(1)}} + g^{(2)}_{\mu\nu}\cancel{R^{(0)}}\right)\right) =$$

$R^{(1)}=0$ כי מקיים את המשוואה

$$= \frac{1}{8\pi G}\left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R^{(2)}\right)$$

נבדוק את התנהגות לאורך הגל - ממוצע

$$T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G_N}\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R^{(2)}\right\rangle = \frac{1}{32\pi G_N}\left\langle \bar{h}_{\lambda\sigma,\mu}\, \bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,\nu}\right\rangle$$

GW = Grav. waves

$$\boxed{T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G_N}\left\langle \partial_\mu \bar{h}_{\lambda\sigma}\, \partial_\nu \bar{h}^{\lambda\sigma}\right\rangle}$$

7.4.05

שיעור
תרגול

בתרגול קודם ראינו:

$$T^{GW}_{\mu\nu}=\frac{1}{8\pi G}\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}R^{(2)}\right\rangle$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h=0 \\ h_{\mu\nu}{}^{,\nu}=0 \\ \Box h_{\mu\nu}=0 \end{array}}$$

$$\Gamma^{\lambda\,(1)}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(-h_{\mu\nu}{}^{,\lambda}+h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\nu}+h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\mu}\right)$$

$$// \quad h_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}=h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}=h_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{,\mu}=0$$

$$R^{(2)}_{\mu\nu}=-\Gamma^{\lambda\,(2)}_{\mu\nu,\lambda}+\Gamma^{\lambda\,(2)}_{\mu\lambda,\nu}+\Gamma^{\lambda\,(1)}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma\,(1)}_{\nu\lambda}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(-g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}+g_{\nu\sigma,\mu}\right)$$

$$// \quad g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-h^{\mu\nu}+h^{\mu\lambda}h_{\lambda}{}^{\nu}$$

לא נשאר באיבר זה.

$$\Gamma^{\lambda\,(2)}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}h^{\lambda\sigma}\left(-h_{\mu\nu,\sigma}+h_{\mu\sigma,\nu}+h_{\nu\sigma,\mu}\right)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda}=\frac{1}{2}\left[\left(-h^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu,\sigma}+h^{\lambda\sigma}h_{\mu\sigma,\nu}+h^{\lambda\sigma}h_{\nu\sigma,\mu}\right)_{,\lambda}\right]$$

ואנחנו מחשבים ממוצע וישנו משפט ש שאומר שממוצע של נגזרת של גודל סופי תמיד מתאפס:

$$\langle f\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{P(T)-P(0)}{T}\to 0$$

$$f(t)=\frac{dP(t)}{dt}$$

ונשארנו עם:

$$R^{(2)}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda\,(1)}_{\mu\sigma}\,\Gamma^{\sigma\,(1)}_{\nu\lambda} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-h_{\mu\sigma}{}^{,\lambda} + h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\sigma} + h_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\mu}\right)\left(-h_{\nu\lambda}{}^{,\sigma} + h^{\sigma}{}_{\lambda,\nu} + h_{\nu}{}^{\sigma}{}_{,\lambda}\right) =$$

ניקח איבר לדוגמא:

$$h_{\mu\sigma}{}^{,\lambda}\,h_{\nu\lambda}{}^{,\sigma} = \left(h_{\mu\sigma}\,h_{\nu\lambda}{}^{,\sigma}\right)^{,\lambda} \xrightarrow[\text{יתאפס}]{\text{במיצוע}} 0$$

$$// \; h_{\nu\lambda}{}^{,\lambda} = 0 \;\rightarrow h_{\nu\lambda}{}^{,\sigma,\lambda} = 0$$

האיבר היחיד שלא יתאפס:

$$= \frac{1}{4}\,h_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{,\mu}\,h_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{,\nu}$$

נציב ב-$T_{\mu\nu}$!

$$T^{GW}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\left\langle h_{\lambda\sigma,\mu}\,h^{\lambda\sigma}{}_{,\nu}\right\rangle$$

תרגיל 3

שאלה 1 ג׳ ;

הטענה היא להשוות את צפיפות פלאנק ל-T_{00} :

$$\frac{d\rho}{d\omega} = T_{00}^{GW}$$

שאלה 4 ב׳ :

משו׳ מקסוול של כבידה:

$$\nabla^{\nu} F_{\mu\nu} = 0$$

כנגזר אלקטרומגנטי.

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}$$

צריך להוציא את $\nabla^{\mu} A_{\mu} = 0$ מתוך הכיול,
כאשר הכיול הוא היכולת לקבוע:

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \nabla_{\mu} \phi$$

וכך ניתן להוכיח $\boxed{g^{\lambda\sigma} \nabla_{\lambda} \nabla_{\sigma}} A_{\alpha} = 0$

$\square$ במרחב ריק.

$$\square A_{\mu} = 0 \qquad \left[\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \beta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right] A_{\mu} = 0$$

המקדמים מייצגים בעצם את המהירויות.

14.4.05

יחסות
תרגול

מסלולים חומריים: $(\varepsilon = 1)$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - E^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = 0$$

$$E^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = const$$ שימור אנרגיה

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = const$$ שימור תנע זוויתי

החלפת משתנים:

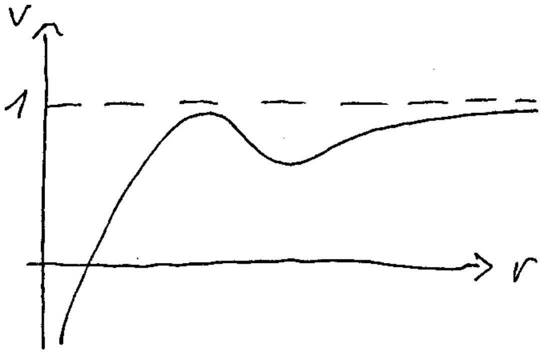
$$x = \frac{2GM}{r}$$

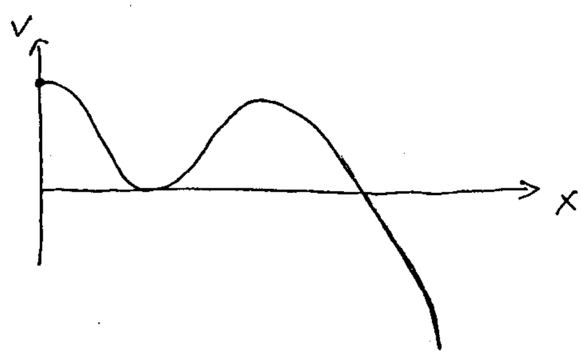
$$l = \frac{L}{2GM}$$

$$V = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = (1-x)(1+l^2x^2) =$$

$$= -l^2x^3 + l^2x^2 - x + 1$$

נצייר את הפוטנציאל כפונקציה של r ושל x:





נמצא את המינימום של הפוטנציאל - תנועה מעגלית:

<u>$V'=0$</u>

$$-3l^2x^2+2l^2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad l^2=\frac{1}{x(2-3x)}$$

$$\boxed{L^2=\frac{GMr}{1-\frac{3GM}{r_0}}} \longrightarrow$$ התנע הזוויתי המאפשר מסלול מעגלי.

עבור $r_0<3GM$ אין מסלולים מעגליים!

לכן נדון רק ב- $r_0>3GM$.

נבדוק שוב כדי למצוא מינימום (ולא את המקסימום):

<u>$V''>0$</u>

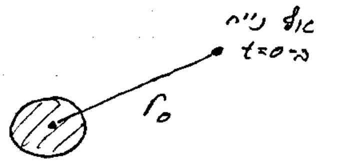
$$-6l^2x+2l^2>0$$

$$x<\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad r_0>6GM$$

כלומר: $3GM<r_0<6GM$ - מסלול לא יציב

$r_0>6GM$ - מסלול יציב

מסלולי נפילה רדיאלית: $L=0$



<u>$L=0$</u>

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2-E^2+1-\frac{2GM}{r}=0$$

$$E^2=1-\frac{2GM}{r_0}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2=2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

$$d\lambda = \frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}}$$

נציב $r = r_0 \sin^2\alpha$ כדי לפתור את האינטגרל:

$$d\lambda = \frac{2r_0 \sin^2\alpha \,\cancel{\cos\alpha}\, d\alpha}{\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}\,\cancel{\cos^2\alpha}}} = 2r_0\sqrt{\frac{r_0}{2GM}}\sin^2\alpha \, d\alpha$$

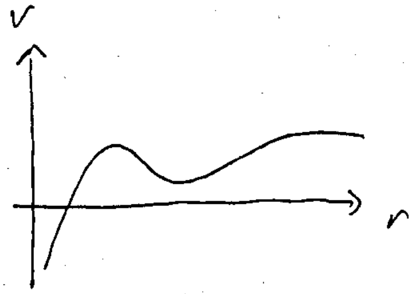
$$\tau(r) = \int_{\pi/2}^{\arcsin\sqrt{\frac{r}{r_0}}} \sin^2\alpha \, d\alpha$$

עבור צופה מבחוץ:

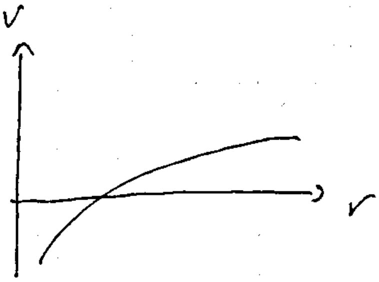
$$d\lambda = \frac{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt}{E} = \frac{1-\frac{2GM}{r}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}}\,dt$$

$$\frac{1-\frac{2GM}{r}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}}\,dt = \frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}}$$

$$dt = \frac{dr\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}$$



$L^2 > 12(GM)^2$



$L^2 < 12(GM)^2$

חלקיק בעל $L^2 > 12(GM)^2$ מגיע מאינסוף. מהו התנאי
לכך שהוא לא יפול לחור השחור?

נדרוש שאנרגיית החלקיק קטנה מהמקסימום:

$$3\ell^2 x^2 - 2\ell^2 x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3\ell^2} = 0$$

$$x = \frac{1}{3}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{\ell^2}}\right)$$

ה-x המעניין הוא X_+ (r קטן יותר):

$$x_c = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\ell^2}}\right)$$

חלקיק $E^2 <_{\text{קריטי}} E_c^2 = V(x_c)$

$V(x_c)$: $\quad x_c^2 = \frac{2}{3}x_c - \frac{1}{3\ell^2}$

$$X_c^3 = X_c\left(\frac{2}{3}X_c - \frac{1}{3\ell^2}\right) = \frac{2}{3}X_c^2 - \frac{X_c}{3\ell^2} =$$

נציב X_c^2 מהמש' הקודמת.

$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3\ell^2}\right)X_c - \frac{2}{9\ell^2}$$

נציב ב-V:

$$V(X_c) = \left(\frac{1}{3} - \frac{4\ell^2}{9}\right)X_c + \frac{2}{9} + \frac{2\ell^2}{3}X_c - \frac{1}{3} - X_c + 1 =$$

$$= \left(\frac{2\ell^2}{9} - \frac{2}{3}\right)X_c + \frac{8}{9} = \frac{2}{3}X_c\left(\frac{\ell^2}{3} - 1\right) + \frac{8}{9}$$

נ"א, שהתנאי שהגוף לא יקרוס הוא!

$$\text{חלקיק } E^2 < \frac{2}{9}\left(\frac{\ell^2}{3} - 1\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\ell^2}}\right) + \frac{8}{9} = E_c^2$$

סיכום:

1. $L^2 < 12(GM)^2 \Rightarrow$ קורס
2. $L^2 > 12(GM)^2$

א. $E^2 < \frac{2}{9}\left(\frac{L^2}{12(GM)^2} - 1\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{12(GM)^2}{L^2}}\right) + \frac{8}{9} \Rightarrow$ יציב

ב. $E^2 >$ - " - $\Rightarrow$ קורס

ג. $E_c = 1$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{9}\left(\frac{L_c^2}{12(GM)^2} - 1\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{12(GM)^2}{L^2}}\right) = \frac{1}{9}$$

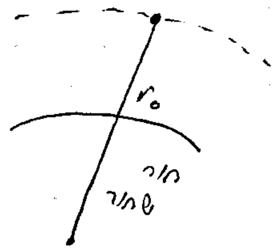
$$\Updownarrow$$

$L > L_3 \Rightarrow$ יציב תמיד

תנועה עם כח

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\lambda}=f^\mu$$

נבדוק מתי גוף יציב במרחב ליד
חור שחור :



הדבר היחיד שמתאפס הוא הנגזרת השניה לפי
הזמן :

$$\cancel{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}}_{\to 0}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}=f^\mu$$

היחיד מה-4 מהירות שלא מתאפס הוא לפי הזמן.

תרגיל 4 ש' 1

אם נחשב ממש נקבל $\frac{G}{18}\langle \dddot{Q}_{ij}\,\dddot{Q}^{ij}\rangle$
באיזה ולמה צריך לכפול בפקטור כדי
להגיע לתשובה הנ"ל.

5.5.05

יחסות
תרגול

מסלולי אור:

באופן כללי:

$$-E^2+r'^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\varepsilon+\frac{L^2}{r^2}\right)=0$$

עבור אור:

$$-E^2+r'^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}=0$$

חומר: $\varepsilon=1$

אור: $\varepsilon=0$

$$E=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

(1) מסלול רדיאלי: $(L=0)$

$$-E^2+r'^2=0 \Rightarrow r'=\pm E$$

$$r=\pm E\tau+\text{const}$$

$$r'=\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\frac{E}{1-\frac{2GM}{r}}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\cancel{E}}{1-\frac{2GM}{r}}\frac{dr}{dt}=\pm\cancel{E} \Rightarrow \pm dt=\frac{dr}{1-\frac{2GM}{r}}$$

מסלול רדיאלי - $ds^2=0$

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{r}} \Rightarrow \pm dt=\frac{dr}{1-\frac{2GM}{r}}$$

קיבלנו אותו הדבר דרך המטריקה.

$$\pm t=\int\frac{dr}{1-\frac{2GM}{r}}=\int\frac{r\,dr}{r-2GM}=\int\left(1+\frac{2GM}{r-2GM}\right)dr=r+2GM\ln(r-2GM)$$

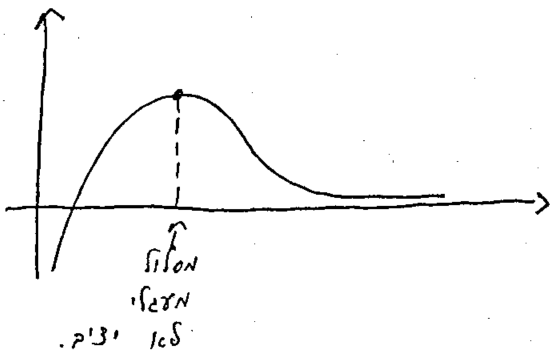
כן רואה צופה מבחוץ את האור. ישנה סינגולריות ב- $r=2GM$ ממנה לא יוכל צופה מבחוץ לראות את האור.

ניתן לכתוב את המטריקה בעזרת u,v:

$$u=t-r-2GM\ln(r-2GM)$$
$$v=t+r+2GM\ln(r-2GM)$$

② <u>מסלולים מעגליים</u>: $(r'=0)$

$$V(r)=\frac{L^2}{r^2}-\frac{2GML^2}{r^3}$$

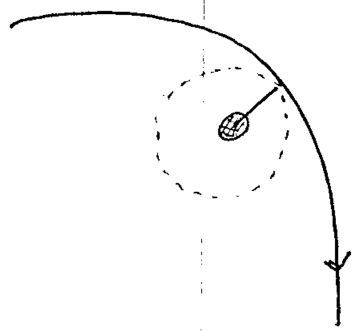


$$V'(r)=-\frac{2L^2}{r^3}+\frac{6GML^2}{r^4}=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{r=3GM}$$

$$-E^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}=0$$

פרמטר הפגיעה.

$$\boxed{b^2\equiv\frac{L^2}{E^2}=\frac{r^2}{1-\frac{2GM}{r}}}=27(GM)^2$$



האור מגיע מאינסוף ולרגע מבצע מסלול מעגלי (בנק' הקרובה ביותר). כדי שהחור השחור לא יבלע אותו צריך להתקיים:

$(r'=0)$

$$b \equiv \frac{L}{E} = \frac{r}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}}$$

$$\frac{r}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}} > 3\sqrt{3}\,GM \longrightarrow$$ צריך להיות גדול מפרמטר הפגיעה.

בדרך של שימוש במטריקה:

$$-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + r^2 d\phi^2 = 0$$

$ds^2=0$, $dr=0$ — מסלול מעגלי.

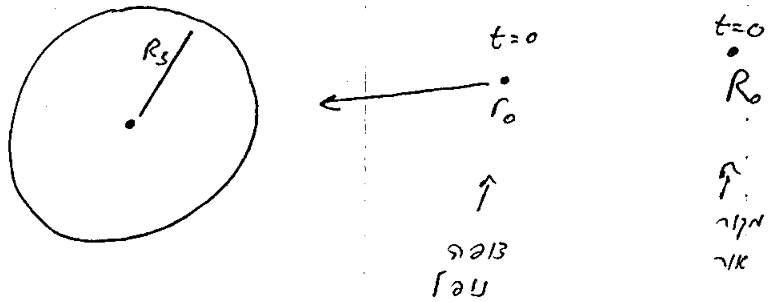
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}}{r}$$

מהירות האור כפי שתמדד ע"י צופה באינסוף:

$$V = r\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{1-\frac{2GM}{r}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

26.5.05

המשך תרגול



מה רואה הצופה בנפילתו?

צופה:

$$d\tau = \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}}$$

$$dt = \frac{\sqrt{1-\frac{r_s}{r_0}}\, dr}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}}$$

אור:

$$ds^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dt = \frac{dR}{1-\frac{r_s}{R}}$$

$$\frac{\sqrt{1-\frac{r_s}{r_0}}\, dr}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}} = \frac{dR}{1-\frac{r_s}{R}}$$

כאשר $r < r_s$ (הצופה עבר את האופק) הוא יפול לתוך החור השחור לפני ש- R יגיע ל- r_s כי אופק ימין מתבדר ואופק שמאל לא מתבדר.

ז"א שצופה שמתקרב אל האופק (אינסוף) יראה את
כל האור "עוקף" אותו ורק הוא יראה את
כל "עתיד" היקום בזמן קצר וברגע שהוא
יעבור את האופק כבר שום אור לא יגיע
אליו מבחוץ.

קוסמולוגיה:

- $$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ &\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \\ &\rho_c \approx 10^{-26}\ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3 \end{aligned}}$$

- $$\frac{\rho}{P} = \frac{1}{w} = \mathrm{const}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\rho = 0$$

$$\ln \rho = \mathrm{const} - 3(1+w)\ln a$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}$$

$\underline{k=0}$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}$$

$$\dot{a}\cdot a^{\frac{1+3w}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^{3(1+w)}}{3}}$$

$$\frac{2}{3+3w}\, a^{\frac{3+3w}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^{3(1+w)}}{3}}\; t$$

$$a = a_0 \left(\sqrt{6\pi G \rho_0 (1+\omega)^2}\; t\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{6\pi G_N (1+\omega)^2 t^2}}$$

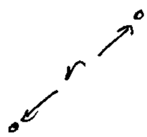
$$H = \frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3(1+\omega)}\,\frac{1}{t} \qquad // \; a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G_N (1+\omega)^2 t^2} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \rho_c$$

המרחק:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)$$

$$d\Omega = 0$$



$$dl^2 = a^2(t)\cdot\frac{dr^2}{1-kr^2}$$

<u>$k=0$</u> $\quad l = a(t)\,r$

<u>$k=1$</u> $\quad l = a\int\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = a\cdot\sin^{-1} r$

9.6.05

חמש
תרגול

משוואות יקום עם יותר ממקור אחד:

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m\left(\frac{a_0}{a}\right)^3+\rho_r\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right)$$

ρ_m - חומר

ρ_r - קרינה.

$$\dot a^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m\frac{a_0^2}{a}+\rho_r\frac{a_0^4}{a^2}\right)$$

נעבור לזמן קונפורמי:

$$d\eta = \frac{dt}{a}$$

$$dt = d\eta\cdot a$$

$$\dot a = \frac{da}{dt} = \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta} = \frac{a'}{a}$$

$$a'^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m a_0^3 a+\rho_r a_0^4\right) = \frac{8\pi G}{3}\rho_r a_0^4\left(\frac{\rho_m}{\rho_r}\frac{a}{a_0}+1\right)$$

$$\frac{da}{\sqrt{1+\frac{\rho_m}{\rho_r}\frac{a}{a_0}}} = 2a_0^2\sqrt{\frac{2\pi G\rho_r}{3}}\,d\eta$$

$$\frac{\rho_r}{\rho_m}\cancel{a_0}\cdot\cancel{2}\sqrt{1+\frac{\rho_m}{\rho_r}\frac{a}{a_0}} = \cancel{2}a_0^{\cancel{2}}\sqrt{\frac{2\pi G\rho_r}{3}}(\eta+\eta_0)$$

$$1+\frac{\rho_m}{\rho_r}\frac{a}{a_0} = \frac{2\pi G\rho_m^2}{3\rho_r}a_0^2(\eta+\eta_0)^2$$

$$a = a_0\frac{\rho_r}{\rho_m}\left[\frac{2\pi G\rho_m^2 a_0^2}{3\rho_r}(\eta^2+2\eta_0\eta+\eta_0^2)-1\right]$$

$a(\eta=0)=0$ נבחר:

$$\eta_0^2 \cdot \frac{2\pi G \rho_m a_0^2}{3\rho_r} = 1$$

$$\eta_0 = \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{3\rho_r}{2\pi G \rho_m}}$$

$$a = \frac{2\pi G \rho_m a_0^3}{3}\eta^2 + \frac{4\pi G \rho_m a_0^3}{3}\cdot\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{3\rho_r}{2\pi G \rho_m}}\,\eta =$$

$$= \frac{2\pi G \rho_m a_0^3}{3}\eta^2 + 2a_0^2\sqrt{\frac{2\pi G \rho_r}{3}}\,\eta$$

- $$t = \int a\,d\eta = \frac{2\pi G \rho_m a_0^2}{9}\eta^3 + a_0^2\sqrt{\frac{2\pi G \rho_r}{3}}\,\eta^2$$

בגבול $t \to \infty$;

$$t = \frac{2\pi G \rho_m a_0^3}{9}\eta^3$$

$$a = \frac{2\pi G \rho_m a_0^2}{3}\eta^2$$

$\Big\rangle\!\Big\rangle \quad a \propto t^{2/3} \rightarrow$ יקום נשלט ע"י חומר

- בגבול $t \to 0$;

$$t = a_0^2\sqrt{\frac{2\pi G \rho_r}{3}}\,\eta^2$$

$$a = 2a_0^2\sqrt{\frac{2\pi G \rho_r}{3}}\,\eta$$

$\Big\rangle\!\Big\rangle \quad a \propto t^{1/2} \rightarrow$ יקום נשלט ע"י קרינה

צ"ל שבעבר היקום נשלט ע"י קרינה ~~[illegible]~~ ואח"כ ע"י חומר.

המשך אחרי תרגיל 5

תרגיל 5 - פתרון

שאלה 2

$$L^2 = \frac{r_s r}{2 - 3\frac{r_s}{r}}$$

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{L} d\phi = \frac{2\pi r^2}{\sqrt{\frac{r_s r}{2-3\frac{r_s}{r}}}} = 2\pi r^2 \sqrt{\frac{2-3\frac{r_s}{r}}{r_s r}} =$$

$$= 2\pi r^2 \sqrt{\frac{2}{r_s r}\left(1 - \frac{3r_s}{2r}\right)}$$

ב.

$$E^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(1 + \frac{r_s}{2r\left(1 - \frac{3r_s}{2r}\right)}\right) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{2r - 3r_s + r_s}{2r\left(1 - \frac{3r_s}{2r}\right)} =$$

$$= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{1 - \frac{3r_s}{2r}}$$

$$E = \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}}$$

$$\boxed{T = \tau \cdot \frac{E}{1 - \frac{r_s}{r}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}} = 2\pi r^2 \sqrt{\frac{2}{r_s r}}$$

המשך קוסמולוגיה

נבדוק זמן אופייני למעבר (נתעלם מקבועים):

$$G\cdot\rho_m a_0^{\cancel{3}}\eta^{\cancel{3}} \approx \sqrt{G\rho_r}\,\cancel{a_0^{2}}\,\cancel{\eta^{2}}$$

$$\eta \sim \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\sqrt{\rho_r}}{\rho_m}$$

$$t \sim G\rho_m a_0^3\eta^3 \sim \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\rho_r^{3/2}}{\rho_m^2}$$

16.6.05

הכנה למבחן

שאלה 4 ב+ג

המשך הג'אודזית:

$$f^\mu = m\left(\cancel{\frac{du^\mu}{d\tau}}^{\,0} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda\right)$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-r_s/r}}, 0, 0, 0\right)$$

$$f^\mu = \Gamma^1_{00} \frac{1}{1-r_s/r}$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(-\frac{r_s}{r^2}\right) = -\frac{r_s}{2r^2}\left(1-r_s/r\right)$$

$$f^\mu = -\frac{m r_s}{2r^2} = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$F^2 = g_{\mu\nu} f^\mu f^\nu = \frac{1}{1-r_s/r}(f^r)^2$$ כמו כל וקטור בריבוע:

$$F = \frac{f^r}{\sqrt{1-r_s/r}}$$

מבחן

שאלה 2 - ג׳ :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \Lambda) - \frac{1}{a^2} = 0 \rightarrow$$ יקום סטטי

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_m + \Lambda \\ p &= 0 + (-\Lambda) = -\Lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \Lambda - 3\Lambda)$$

כדי שיתאפס : $\underline{\underline{\rho_m = 2\Lambda}}$

$$0 = \frac{\cancel{8}^{4}\pi G}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\rho_m - \frac{1}{a^2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_m}}$$