משוואת שרדינגר

$\Psi(x,y,z,t)$ היא פונקציית הגל של החלקיק המתארת את התנהגות החלקיק בהשפעת פוטנציאל מסויים $V(x,y,z,t)$. על לקבל את פונקציית הגל לפוטנציאל נתון עלינו לפתור את משוואת שרדינגר (במימד אחד):

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi$$

חלקיק חופשי הוא חלקיק עליו לא פועל פוטנציאל בשום מקום או זמן $V(x,t) = 0$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

פונקציות הגל הפותרות את משוואת שרדינגר הן מרוכבות.

מכיוון שמשוואת שרדינגר היא לינארית, אז אם Ψ_1 ו Ψ_2 פותרות את המשוואה, גם $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ הוא פתרון

אנו יכולים להגדיר את האופרטורים

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \ , \ p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

ועל כן לכתוב את המשוואה לחלקיק חופשי בצורה הזו

$$E\Psi(x,t) = \frac{p}{2m}\Psi(x,t)$$

* דבר זה מסתדר לנו עם ההגדרה הקלסית לאנרגיה קינטית $E_{kinetic} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

הפקת מידע פיסיקלי מתוך $\Psi(x,y,z,t)$

על פי הפרשנות הסטטיסטית של מקס בורן הגודל $|\Psi(x,t)|^2 \equiv \Psi^*(x,t)\cdot\Psi(x,t)$ נותן לנו את צפיפות ההסתברות למציאת החלקיק בנקודה x בזמן t, ולכן

$$\boxed{\int_a^b |\Psi(x,t)|^2\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{probability of finding the particle}\\ \text{between } a \text{ and } b\text{, at time } t.\end{array}\right\}}$$

ולכן הדרישה לנרמול היא - $1 = \int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x,t)|^2 dx$

עבור חלקיק מסויים ידוע שפונקציית צפיפות ההסתברות של משתנה מיקום החלקיק x נתונה על ידי הגאוסיאן

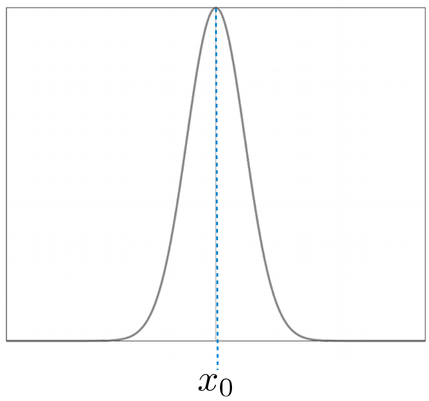
$|\psi(x,0)|^2 = f(x) = Ae^{-\frac{(x-x_0^2)}{2d^2}}$.

א. חשב את A.

ב. מצא את המיקום הממוצע של החלקיק $<x>$.

ג. מצא את סטיית התקן במיקום החלקיק.

א. על מנת לחשב את A אנו צריכים לנרמל את הפונקציית גל



$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2}} dx$$

* אינטגרלים חשובים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a^2x^2} dx = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

נגדיר $y = (x - x_0)$, כך ש $dy = dx$, ולכן אנו יכולים לעשות החלפת משתנה אינטגרציה ולקבל

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{(y)^2}{2d^2}} dy = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}} dy = A \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{2d^2}}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} d}$$

ב) ערך התוחלת של המיקום של החלקיק מוגדר בצורה הבאה:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx$$

במקרה שלנו אנו מקבלים

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2}}dx$$

ניתן לעשות שוב את החלפת המשתנה אינטגרציה $y=(x-x_0)$ (נשים לב שצריך לשנות ל $x=y+x_0$), כך שאנו מקבלים

$$\begin{aligned}\langle x\rangle =& \int_{-\infty}^{\infty}(y+x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =& \int_{-\infty}^{\infty}(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty}(x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =&0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}x_0\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2}d\end{aligned}$$

כך שאנו מקבלים $\langle x\rangle = x_0$, ואין הדבר מפתיע שבמדידה חוזרת של אותה פונקצית הגל, הממוצע של מדידות המיקום של החלקיק שיתקבלו לנו יתנו לנו את הערך בו צפיפות ההסתברות למציאת החלקיק היא הכי גבוה, דהיינו x_0

ג) את השונות מחשבים לפי המשוואה $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle + \langle x\rangle^2}$. חישבנו $\langle x\rangle$ בחלק הקודם ולכן עלינו לחשב $\left\langle x^2\right\rangle$

$$\begin{aligned}\left\langle x^2\right\rangle =& \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2d^2}}dx\\ =& \int_{-\infty}^{\infty}(y+x_0)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =& \int_{-\infty}^{\infty}(y)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty}(2yx_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty}(x_0)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}d}e^{-\frac{(y)^2}{2d^2}}dy\\ =&d^2+x_0^2\end{aligned}$$

ולכן סטיית התקן המתקבלת היא - $\Delta x = \sqrt{d^2+x_0^2-x_0^2} = d$