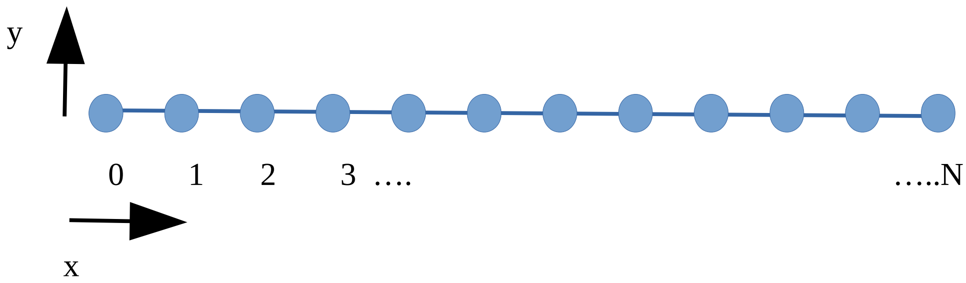
# פיזיקה 3ב – תרגול 4

**פתרנו עד כה מתנדים של מספר דרגות, ניראה מה קורה כשאנחנו עוברים למספר דרגות אינסופי.**

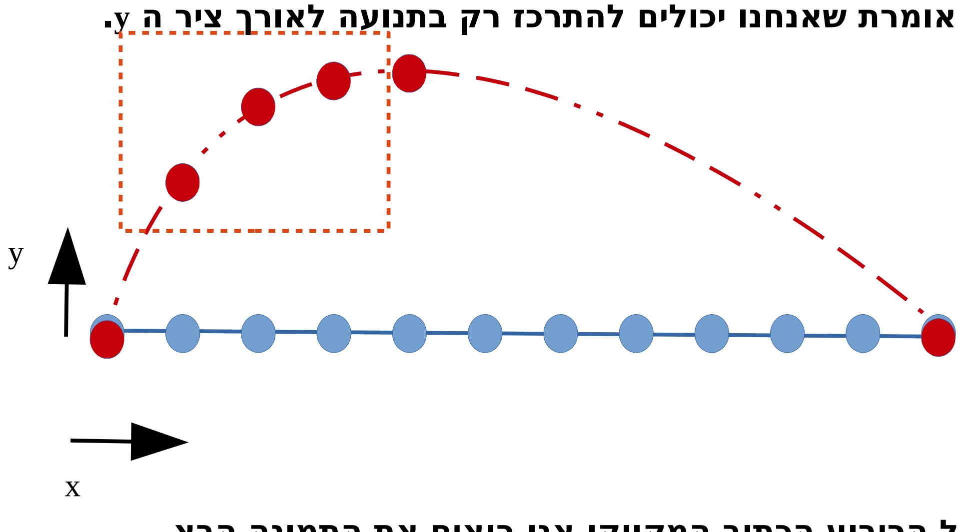
**נתחיל בלחשוב על N מסות לאורך מיתר**



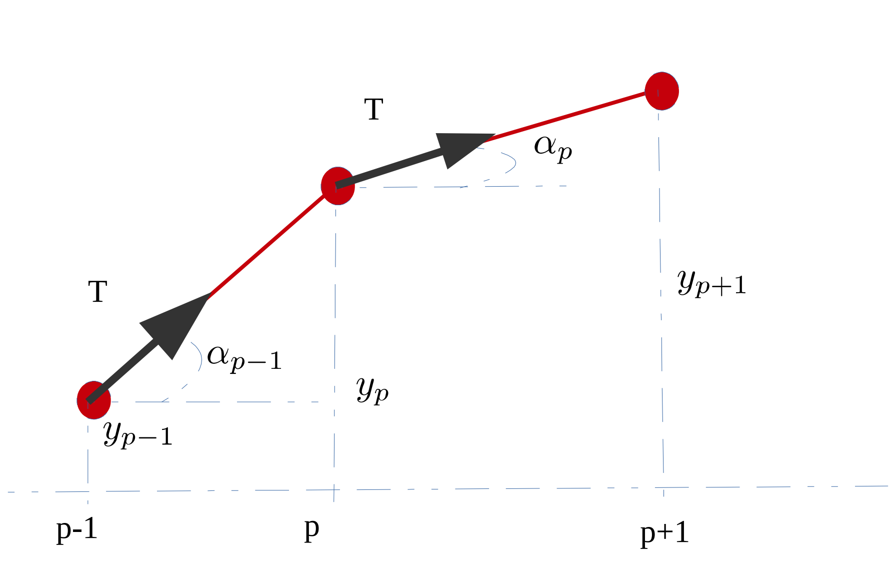

**ההנחות שאנחנו לוקחים הן:**

1. **כל המסות שווה – m**
2. **המרחק בין המסות הוא זהה – h**
3. **למיתר יש קבוע אלסטיות k בין כל שתי מסות**

**אנחנו נצא גם מתוך הנחה, שכל עוד התנודות שאנחנו מתייחסים אליהם, שהן החריגות של המסות מ y=0 , הינן קטנות, המיקומים של כל אחת מהמסות לאורך ציר ה x נישארים קבועים. זאת אומרת שאנחנו יכולים להתרכז רק בתנועה לאורך ציר ה y.**




**אם אנחנו עושים זום על הריבוע הכתוב המקווקו אנו רואים את התמונה הבא**



**אנו יכולים לכתוב את משוואת התנועה למסה בנקודה p בצורה הבאה**

$$m\ddot{y}_p = F_{y_{p+1}} - F_{y_{p-1}} = k\left[y_{p+1} - y_p\right] - k\left[y_p - y_{p-1}\right]$$

**האורך של המיתר עצמו ניתן לנו על ידי** $L = Nh$ **, המסה הכוללת של המסות על המיתר היא**
$M = Nm$ **, וקבוע האלסטי של המיתר כולו היינו** $K = k/N$

**לכן ניתן לכתוב את משוואת התנועה בצורה**

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y_p = \frac{KL}{M} \frac{y_{p+1} - 2y_p + y_{p-1}}{h^2}$$

**כאשר אנו הולכים לגבול** $h \to 0$**, אז אנו רואים שהחלק השמאלי של המשוואה הנ"ל היינה הנגזרת המרחבית השנייה של המשתנה**

$$f''(x) \approx \frac{\delta_h^2[f](x)}{h^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

**(ראו -** [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference#Higher-order_differences](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference#Higher-order_differences)**)**

**כך שהמשוואת תנועה המתקבלת היא**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{KL}{M} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

**הגודל** $\frac{M}{L}$ **הוא הצפיפות מסה של המיתר -** $\rho$**, ולכן ניתן לכתוב משוואה זו גם בצורה**

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

***<u>שאלה:</u>***
**הראה שכל פונקציה מהצורה** $\phi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ **מהווה פתרון של משוואת הגלים** $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

***<u>פתרון:</u>***
**ניקח**

$$\psi(x,t) = f(x - vt)$$

**לוקחים נגזרת שניה בזמן**

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot v, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial t} \cdot v = v^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

**ונגזרת שניה במרחב**

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

**נציב תוצאות אלו במשוואת הגלים ונקבל**

$$\rho v^2 \frac{d^2 f}{du^2} = K \frac{d^2 f}{du^2}$$

**כך שמתקבל שהמהירות של הגל במיתר היא**

$$v = \pm\sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

# <u>גל עומד במיתר</u>

**ניתן לראות הדגמה של גל עומד במיתר באתר הבא – [לינק].**

**אם שני גלים סינוסואידלים בעלי אמפליטודה ואורך גל זהים נעים בכיוונים מנוגדים לאורך מיתר, ההתאבכות ביניהם תיצור גלים עומדים.**

**גל סינוסואידלי הנע בכיוון החיובי של ציר ה x ניתן לכתוב בצורה**
**$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ , כאשר המהירות של הגל ניתנת לנו על ידי $v = \frac{\omega}{k}$**

**אנו יכולים לראות שלא ניתן להפריד את הפונקציה הזו לשתי פונקציות כאשר פונקציה אחת היינה תלויה רק בזמן (t) ופונקציה שניה תלויה רק במרחב (x). זאת אומרת, לא ניתן לכתוב את $y_1$ בצורה הבאה $y_1(x,t) = y_m F(x) \cdot G(t)$**

**לעומת זאת, גל עומד מאופיין בכל שאנו כן יכולים לכתוב אותו בצורה בה התלות בזמן "מופרדת" מהתלות במרחב - $f(x,t) = F(x)G(t)$**

**אם ניקח גל דומה ל $y_1$, אך שנע בכיוון השלילי של ציר ה x -**
**$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ , ונחשב את ההתאבכות ביניהם נקבל**

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

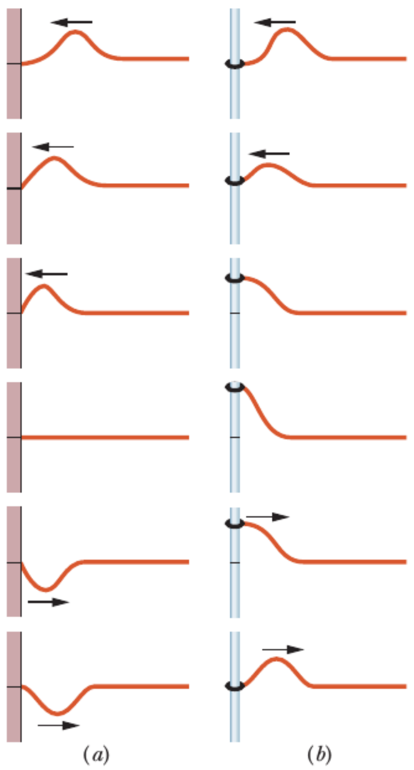
**כאן אנו יכולים להשתמש בזהות הטריגונומטרית**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

**ולקבל**

$$y(x,t) = [2y_m \sin(kx)]\cos(\omega t)$$

**כך שאנחנו רואים שהפונקציה שמתקבלת היינה כזו בה התלות המרחבית מופרדת מהתלות בזמן.**




**ישנן שתי צורות שפולס יכול לחזור מקצה של מיתר**

**כאשר המיתר מחובר לקצה נוקשה (a) אשר לא נותן לו לזוז ממקומו אז כאשר הפולס מגיע לקיר הוא מפעיל כוח כלפי מעלה, ובגלל הכוח השלישי של ניוטון הקיר מפעיל כוח כלפי מטה, ולכן הקיר בעצם יוצר פולס לכיוון השני רק עם אמפליטודה הופכית.**

**כאשר הפולס מגיע לקצה של טבעת המחליקה ללא חיכוך על מוט (b) , המיתר עולה לאורך המוט, אך הטבעת לא מפעילה כוח אנכי על המיתר. הפולס שנוצר היינו בעל אותה אמפליטודה לזה שניכנס, רק בכיוון ההפכי.**

**גל עומד יכול להתקבל במיתר באורך L שמוחזק בשני קצוותיו, וניתן לקבל את משוואת הגל על ידי שימוש במשוואת הגלים והצבת תנאי ההתחלה המתאימים לבעיה זו.**

**משוואת הגלים היא**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

**תנאי השפה המתאימים למיתר שמוחזק בשתי הקצוות הן**

$$y(0,t) = 0 \quad , \quad y(L,t) = 0$$

**ויש לנו את הפונקציות המתארות לנו את תנאי ההתחלה, שהם הצורה של המיתר ב** $t = 0$

$$y(x,0) = f(x)$$

**והמהירות של המיתר לאורך ציר ה y בזמן** $t = 0$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

**מכיוון שאנו מחפשים פתרון של גלים עומדים אנו יוצאים מתוך הנחה שניתן להפריד את הפונקציה המתקבלת לחלק שתלוי רק במרחב וחלק שתלוי רק בזמן**

$$y(x,t) = \psi(x)h(t)$$

**ולכן אנו יכולים לכתוב את משוואת הגל בצורה הבאה**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\psi(x)h(t)\right) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\psi(x)h(t)\right)$$

$$\psi(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}h(t) = v^2 h(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)$$

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\lambda$$

**לכן ניתן לפצל את משוואת הגלים לשתי משוואות דיפרנציאליות רגילות**

$$\frac{1}{c^2 h}\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = -\lambda \quad , \quad v^2 \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = -\lambda$$

**פתרון של המשוואה ל** $\psi$ **לפי תנאי השפה של מיתר במוחזק בשתי קצוותיו נותנת לנו את הערכים העצמיים ואפני התנודה המתאימים להם**

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \quad , \quad \psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

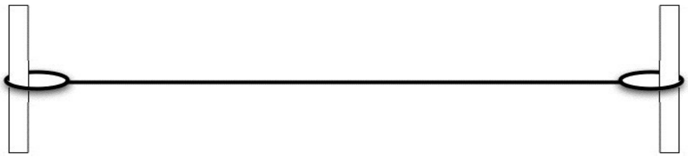
**הפתרון הכללי שמתקבל לנו למשוואת הגלים הוא**

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sin\left(k_n x\right) + B_n \cos\left(k_n x\right)\right]\cos\left(\omega_n t + \phi_n\right)$$

**כאשר** $\omega_n = v k_n$
**כאשר בעבור** $\omega = 0$ **יש פתרון נפרד**

$$y_0(x,t) = \left(A_n x + B_n\right)\left(C_n t + D\right)$$

**<u>בעיה לדוגמה</u>**



**נתון מיתר באורך L המחובר בשני קצותיו לטבעות חסרות מסה, המחליקות ללא חיכוך בכיוון האנכי, נתון כי מהירות הפאזה הינה v.**

1. **מהן התדירויות העצמיות של המערכת?**
2. **צייר את אופן התנודה המעורר הראשון (אופן התנודה המתנודד הראשון) עבור $t=0,\ L/2v,\ L/v$ הנח בזמן אפס מקסימום עבור פונקציית הזמן**
3. **נתון כי בזמן $t=0$ המיתר נמצא במנוחה וצורתו $y_0(x)=a\cos(\frac{2\pi x}{L})$. מצא את צורת המיתר בזמן t.**
4. **נתון כי בזמן $t=0$ המיתר נמצא במנוחה וצורתו $y_0(x)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\cos(\frac{\pi x}{L})$. מצא את צורת המיתר בזמן**

**<u>פתרון</u>**

**1) תנאי השפה עבור מיתר הקשור בשתי קצותיו לטבעות חסרות מסה המחליקות על מוט ללא חיכוך הינן**

$$(1)\ \frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0\ \ ,\ \ (2)\ \frac{\partial y(L,t)}{\partial x}=0$$

**נשתמש בתנאי שפה אלו בפתרון הכללי לגל עומד במיתר**

$$y_n(x,t)=\left[A_n\sin\left(k_nx\right)+B_n\cos\left(k_nx\right)\right]\cos\left(\omega_nt+\phi_n\right)$$

$$\frac{\partial y_n(x,t)}{\partial x}=\left[A_nk_n\sin\left(k_nx\right)+B_nk_n\cos\left(k_nx\right)\right]\cos\left(\omega_nt+\phi_n\right)$$

$$(1)\rightarrow\ \frac{\partial y_n(0,t)}{\partial x}=\left[A_nk_n\cos\left(0\right)+B_nk_n\sin\left(0\right)\right]\cos\left(\omega_nt+\phi_n\right)=0$$

$$\Rightarrow A_n=0$$

$$(2)\rightarrow\ \frac{\partial y_n(L,t)}{\partial x}=\left[B_nk_n\sin\left(k_nL\right)\right]\cos\left(\omega_nt+\phi_n\right)=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{\pi n}{L}$$

**מכאן שהפתרון המתקבל מתוך תנאי השפה הוא**

$$y_n(x,t)=B_n\cos(k_nx)\cos(\omega_nt+\phi_n)$$