תנועה מחזורית/הרמונית

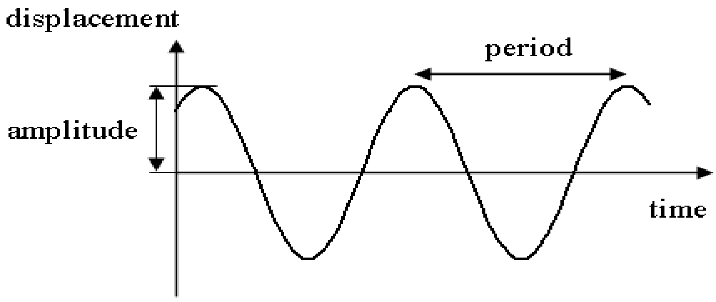
תנועה הרמונית היא כל תנועה שחוזרת על עצמה בצורה מחזורית בזמן או במרחב. הדוגמה הפשוטה ביותר הוא המתנד ההרמוני הפשוט (Simple Harmonic Motion - SHM). על מנת לתאר תנועה מחזורית יש לבחור פונקציה מתמטית אשר יש לה תכונה של מחזוריות - $f(x) = f(x+c)$ לכל x .

הפונקציה הנלקחת לשם תיאור SHM היא הקוסינוס - $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ (1)
כאשר x_m זו האמפליטודה (משרעת) , ω זו התדירות הזוויתית(angular frequency), ו ϕ נקראת המופע של המערכת (phase constant or phase angle).

$[x_m] = L$, $[t] = T$, $[\omega] = rad/T$, $[\phi] = rad$

אם ניקח $\phi = 0$, ומכיוון שאנו יודעים ש $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ (2), אנחנו למצוא מהו הזמן הדרוש ל SHM על מנת להשלים מחזור - $x_m \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega(t+T))$
ולכן מכיוון שיש לנו את הזהות (2) אנו יכולים לכתוב $\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$, כך ש

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



מהירות ה SHM

על מנת לדעת איך משתנה המהירות של ה SHM כפונקציה של הזמן אנו גוזרים את (1) ביחס לזמן -

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} x_m \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow v(t) = \frac{d}{dt} x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (3)$$

אנו רואים שהמקדם של פונקצית הסינוס (שהיא חסרת יחידות) הוא $-\omega x_m$, מבחינת יחידות זה מבטח את המהירות, ועל כן מקדם זה הוא המשרעת של המהירות (velocity amplitude).

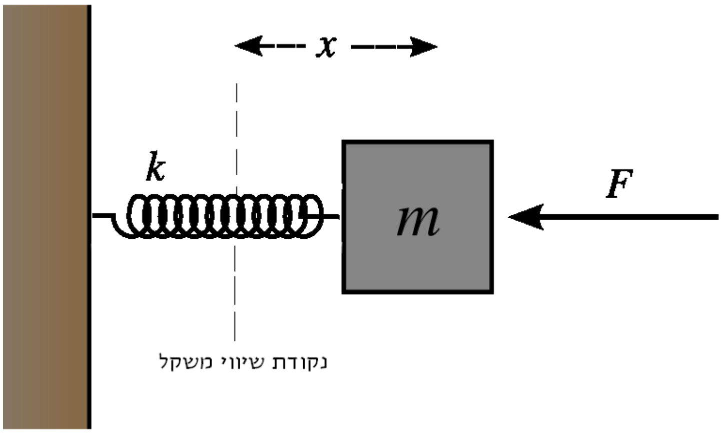
תאוצת ה SHM

אם ניגזור שוב את (3) נקבל $\frac{dv(t)}{dt} = a(t) = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)]$

ומכך מתקבל $a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$ (4)

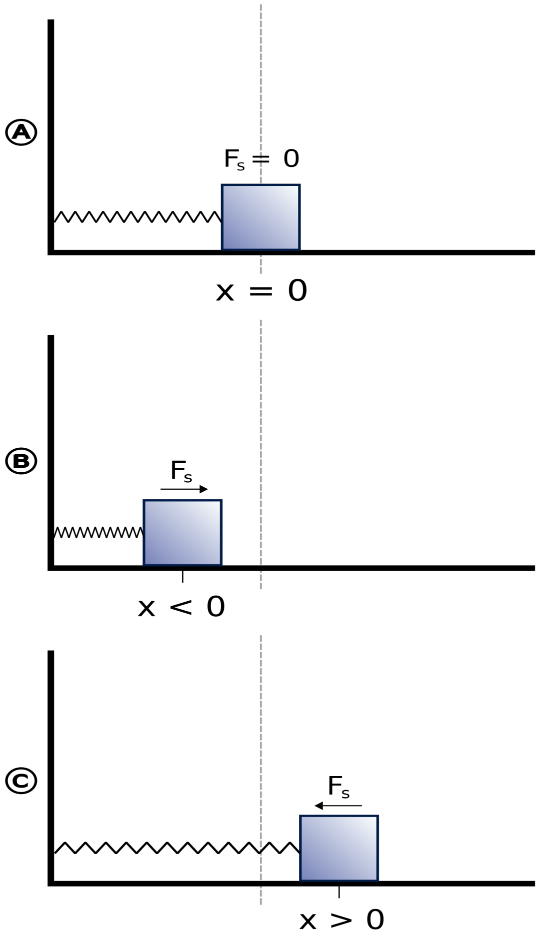
השוואה של (4) עם (1) מראה לנו ש $a(t) = -\omega^2 x(t)$
זה מלמד אותנו שני דברים חשובים:
1) התאוצה של המסה תמיד הפכית להעתק שלו (ביחד לנקודה $x = 0$)
2) ההעתק והתאוצה מקושרים ביניהם על ידי הקבוע ω^2

הדוגמה הפיזית הנלקחת היא מסה וקפיץ. אנו יודעים שתנועה זו, אם זונחים את השפעת החיכוך, היינה תנועה מחזורית.



נקודת שיווי המשקל היא הנקודה בה הקפיץ רפוי ואינו מפעיל כוח על המסה, ולכן סך הכוח הפועל על המסה בציר האופקי הוא אפס.

הכוח שמפעיל הקפיץ על המסה פרופורציונלי להפש בין נקודת שיווי המשקל של הקפיץ לנקודה האקטואלית - x , ועל פי חוק הוק, הכוח שמפעיל קפיץ הוא - $F=-kx$. זאת אומרת שהכוח (ועל כן גם התאוצה, הוא הפכי להעתק של המסה).

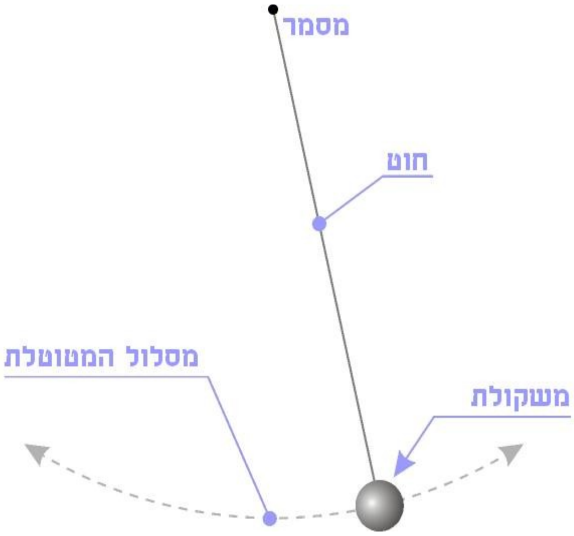


אנו יודעים ש $F=ma=m(-\omega^2 x)=-(m\omega^2)x$

ועל כן יש לנו את הזהויות -

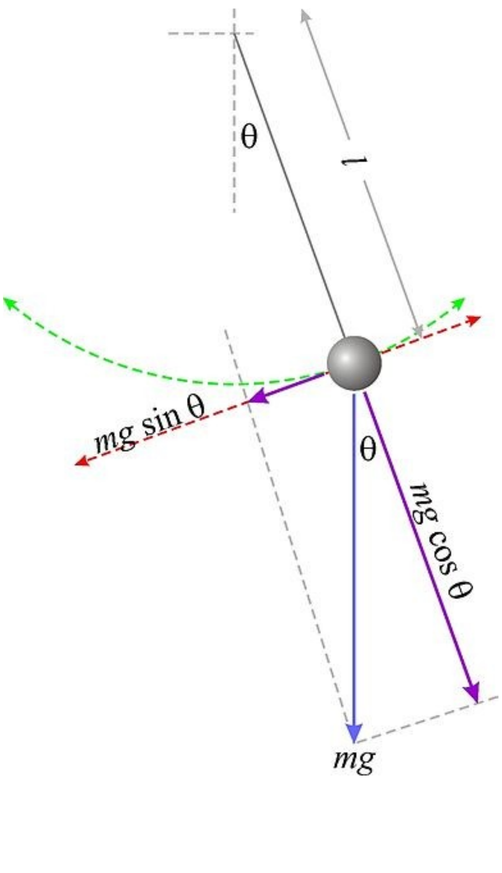
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

דוגמה נוספת של תנועה הרמונית – מטוטלת פשוטה



הכוחות הפועלים על המסה הם כוח המתיחות של החוט וכוח הכבידה.

על מנת לקבוע את קצב שינוי הזווית θ , אנחנו צריכים לחשב את מומנט הכוח המופעל על המסה.



אנו יכולים לרשום את מומנט הכוח על המסה בצורה הזו -

$$\tau = l(F_g sin\theta)$$

אם אנחנו משתמשים בקירוב הזווית הקטנה של הסינוס
אנחנו יכולים להשתמש ב $\theta \approx \sin\theta$

מכיוון שיש לנו את היחס $\tau = I\alpha$
(כאשר I זה התנע הזוויתי ו α זו התאוצה הזוויתית)

אנחנו יכולים לרשום

$$\alpha = -\frac{mgl}{I}\theta$$

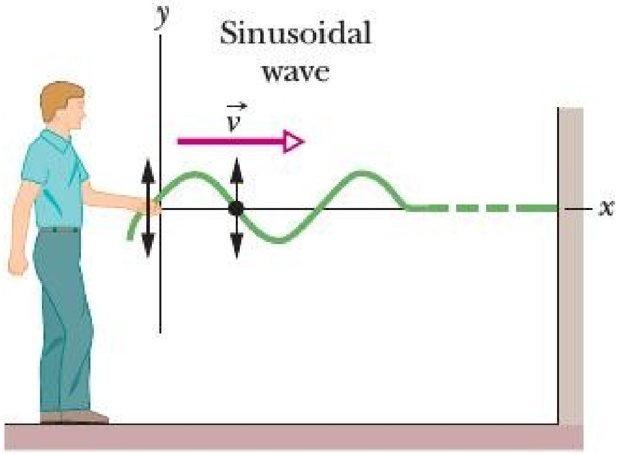
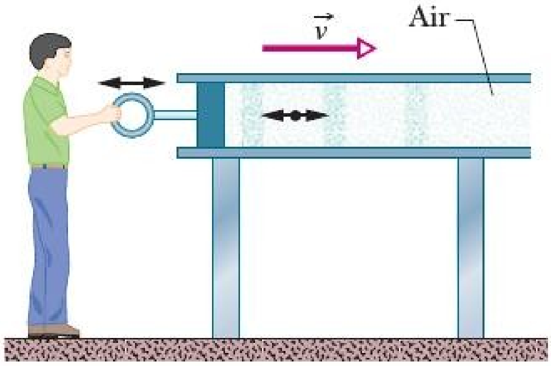
מתוך השוואה למקרה של מסה וקפיץ אנו יכולים מיד לראות שמתקבלת המשוואה -

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

ולכן -

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

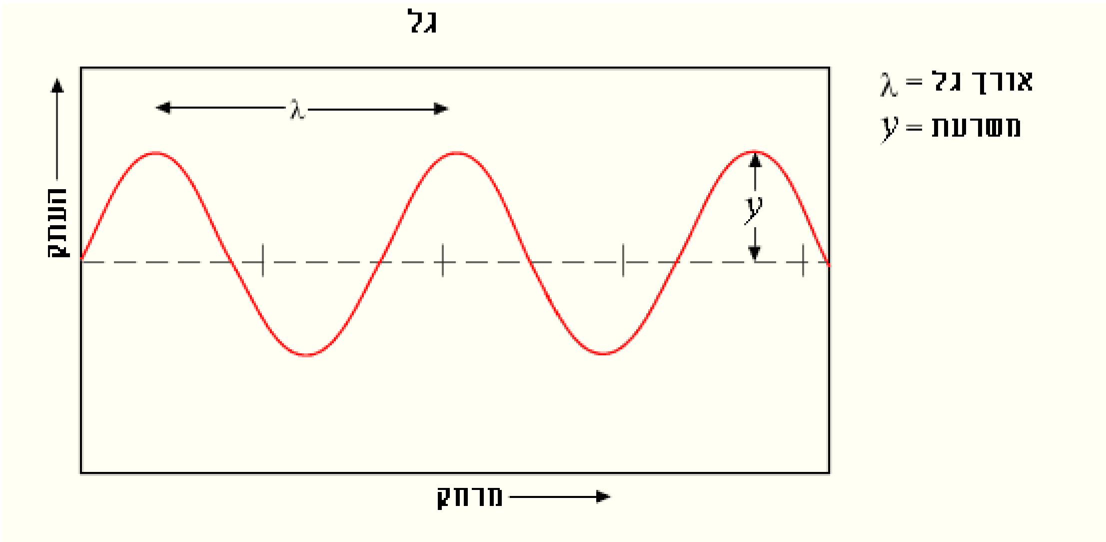
גלים

Transverse wave – גל רוחבי	Longitudinal wave - גל אורכי
	

בואו ניקח הפרעה בצורת סינוס אשר נעה במרחב, בכיוון החיובי של ציר ה x -

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad (5)$$

משוואה זו נותנת לנו את הערך של y , כפונקציה של הזמן והמרחב. כך היא בעצם נותנת לנו את הצורה של הגל בכל רגע בזמן.



מציאת אורך הגל -

נציב $t=0$ ונחפש את הפרש המרחק בו מתקיים לנו $y(x,0) = y(x+\lambda,0)$

$$y_m \sin(kx_1) = y_m \sin(k(x_1+\lambda)) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda)$$

מתוך המחזוריות של פונקציית הסינוס אנו מקבלים - $$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

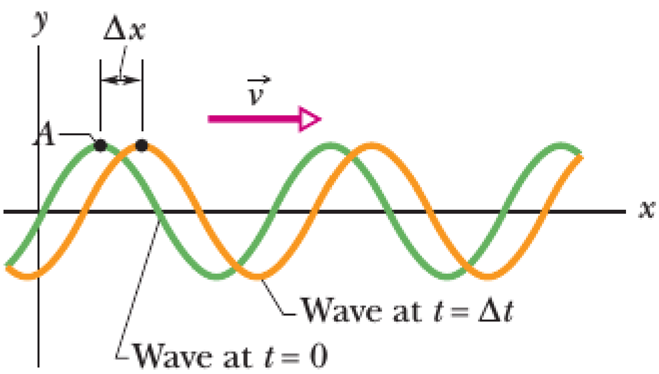
k זה מספר הגל, ו λ זה אורך הגל

באותה צורה אם אנחנו מסתכלים בנקודה מסויימת במרחב ושואלים כמה זמן לוקח לגל להגיע לאותו ערך y , אנחנו מוצאים את זמן המחזור של הגל

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

התדר של הגל מוגדר -
$$f = \frac{1}{T}$$

<u>מהירות הגל</u>



הנקודה A שומרת על הערך שלה כאשר הגל מתקדם Δx בזמן Δt . ולכן הערך של הפאזה של נוסחת הגל צריכה להישמר קבועה - $kx - \omega t = constant$. על מנת למצוא את מהירות הגל(מהירות פאזה – wave speed) אנו לוקחים את הנגזרת של הפאזה ומקבלים -

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = \frac{d}{dt}(constant) = 0$$

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}$$

* שימו לב למשהו מעניין - אם אנחנו לוקחים נגזרת כפולה ביחס לזמן של (5), ונגזרת כפולה ביחס למרחב של (5) אנו נקבל את היחס הבא -

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

זוהי בעצם משוואת הגלים, שכל גל אידיאלי מקיים

<u>סופרפוזיציה של גלים</u>

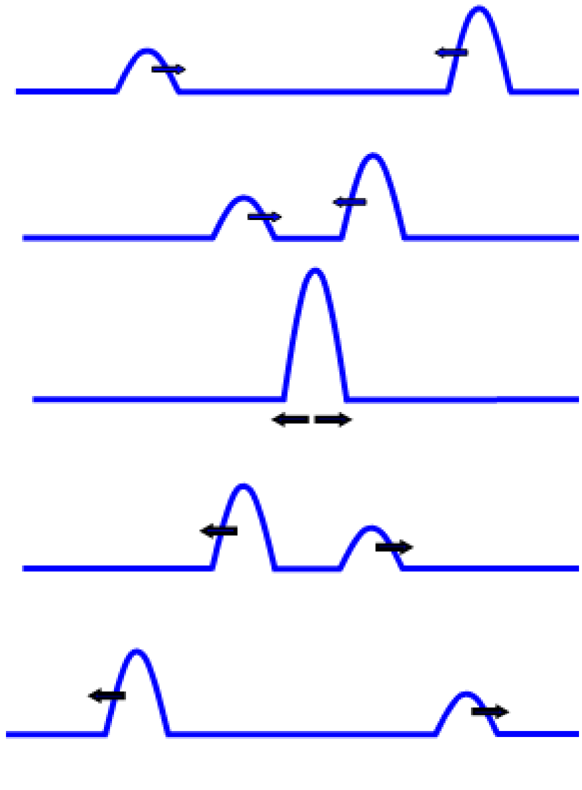


Figure 1(a)

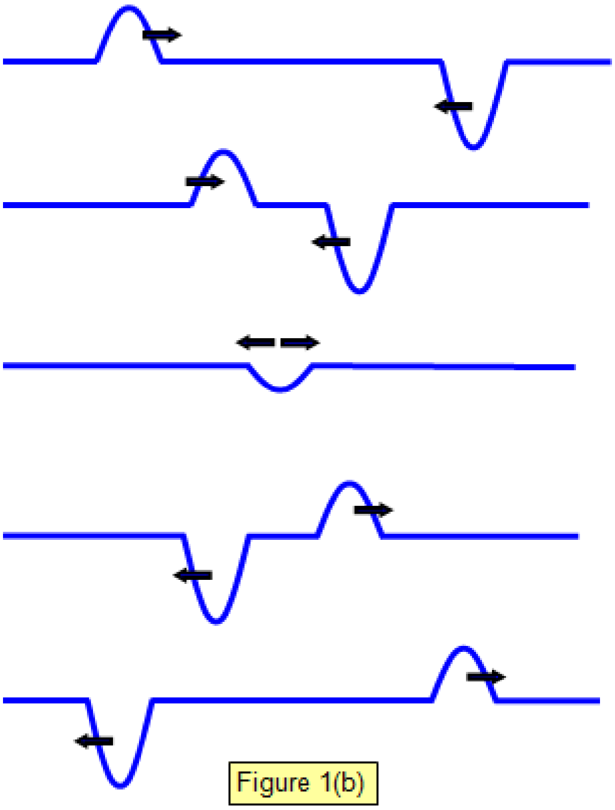


Figure 1(b)