

אוניברסיטת בן – גוריון בנגב
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה לפיסיקה

הצעת תוכנית לעבודת גמר לתואר "מגיסטר"

מודל תאורטי של אינטרפרומטר סניאק אטומי לצורך בדיקת
התכנות ניסיונית

Theoretical Model of Sagnac Atom Interferometer for the Purpose of Experimental Feasibility Study

שם: אופיר ארזואן

ת.ז.: 025219486

מחלקה: פיסיקה

שמות המנחים: פרופ' ישי אבישי

דרי רון פולמן

חתימת התלמיד _____ תאריך _____

אישור המנחה _____ תאריך _____

אישור המנחה _____ תאריך _____

אישור יו"ר ועדת מוסמכים של המחלקה _____ תאריך _____

רקע כללי:

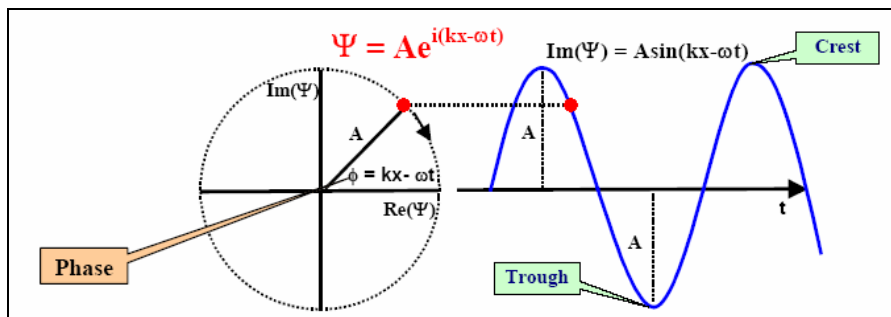
אינטרפרומטר הוא התקן פיסיקאלי המפצל אלומת גלים לשתי אלומות שונות המתאחדות בשנית לאחר שכל אחת מהן עברה דרך שונה. הפרש דרכים זה יוצר הפרש פאזה. בהתקן כזה ניתן, למשל, לבדוק את התכונות הגליות (הקוונטיות) של אטומים. אטומים נייטרלים רגישים לשדות אלקטרומגנטיים הודות למבנה הפנימי של רמות האנרגיה של האטום, אך יתרונה הגדול של האינטרפרומטריה האטומית נעוץ ברגישות הגבוהה למדידת קצבי סיבוב, תאוצה ואף כבידה. עד כה, דווח על אינטרפרומטרים אטומיים, בתצורת מאך-זנדר, שבהם נעים אטומים חופשיים בין רכיבי האינטרפרומטר (כגון מפצל גל) [1-5]. לאחרונה דווח על ידי Ketterle וקבוצתו על אינטרפרומטר אטומי שבו נעים האטומים בפוטנציאל אופטי, המתקבל באמצעות קרני לייזר [6]. באינטרפרומטר מנחה מסוג זה האטומים נעים בתוך פוטנציאל לאורך כל מסלול תנועתם, כך אפשר לקבל אינטרפרומטר רב מסלולי בתצורות מגוונות. יתרון נוסף של האינטרפרומטר המנחה טמון באפשרות להקטין התקנים אלו לכדי מילימטרים רבועים ספורים ולהתקנים על גבי שבב (Atom Chip). עבודה זו עוסקת בהבדלים בין האינטרפרומטרים השונים ובהיתכנות של אינטרפרומטר רגיש על גבי שבב.

מבוא תיאורטי:

במכניקה הקוונטית ניתן לתאר חלקיק כגל מישורי המתקדם במרחב באמצעות הפונקציה:

$$\Psi = Ae^{ikx}$$

כאשר: A - אמפליטודת הגל, k - וקטור הגל של החלקיק. גל המתקדם מרחק x_0 צובר פאזה ששיעורה kx_0 (תמונה 1).



תמונה 1: פאזה גל המובע באמצעות אקספוננט

נתייחס לשני גלים שווי אמפליטודה ושווי פאזה, Ψ_1 ו- Ψ_2 הנעים ממקור גלים לעבר נקודה P . Ψ_1 עובר את המרחק x_1 בדרכו לנקודה ואילו Ψ_2 עובר את המרחק x_2 . הפרש הפאזה בין הגלים בנקודה P נתון על ידי:

$$\Delta\phi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

כאשר: λ - אורך הגל. העוצמה, I , בנקודה P מתכונתית לריבוע סכום האמפליטודות (סופרפוזיציה):

$$I \propto |\psi_1 + \psi_2|^2 = 2A^2 + 2A^2 \text{Cos}[k(x_2 - x_1)]$$

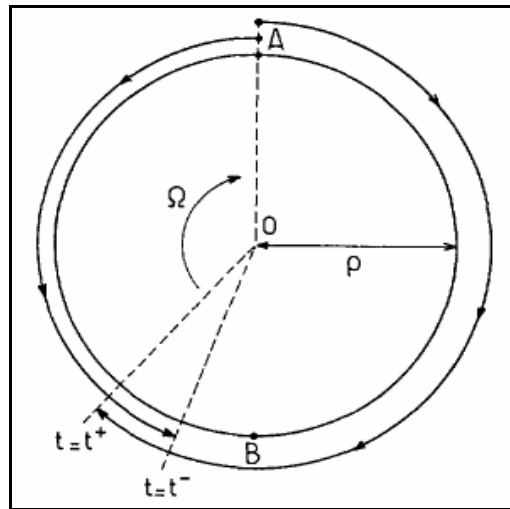
מכאן שעבור: $\Delta\phi = 2n\pi \leftrightarrow \Delta x = n\lambda$ תתקבל תמונת התאבכות בונה, כלומר עוצמת סכום הגלים גדולה מסכום העוצמות. באופן דומה, תתקבל תמונת התאבכות הורסת עבור:

$$\Delta\phi = \pi + 2n\pi \leftrightarrow \Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

אפקט סניאק הוא היווצרות הפרש פאזה הנצברת לאורך זרועות של אינטרפרומטר, המסובב סביב צירו, כתוצאה מכח קוריוליס הפועל על החלקיקים. קרן הנכנסת לאינטרפרומטר בנקודה A (תמונה 2) מתפצלת לשתי קרניים, האחת מתקדמת עם כוון השעון והשנייה כנגד כוון השעון. אם האינטרפרומטר לא מסתובב, הקרניים מגיעות לנקודה B כעבור זמן:

$$t = \frac{\pi \rho}{v}$$

כאשר: ρ – רדיוס האינטרפרומטר, v – מהירות הגל. אם מסובבים את האינטרפרומטר, סביב ציר הניצב לאינטרפרומטר ונמצא במרכזו, במהירות זוויתית Ω , הקרן הנעה עם כוון הסיבוב צריכה לעבור מרחק גדול יותר מ- $\pi\rho$ על מנת להגיע לנקודה B והאינטרפרומטר מסתובב בזווית קטנה במהלך הזמן הדרוש לקרן להשלים מהלך זה. באופן דומה, הקרן הנעה נגד כוון הסיבוב צריכה לעבור מרחק קטן יותר מ- $\pi\rho$ על מנת להגיע לנקודה B.



תמונה 2: הפרש הדרכים האופטיות באינטרפרומטר סניאק

נסמן ב- t^+ את הזמן הדרוש לקרן הנעה עם כוון הסיבוב להגיע לנקודה B:

$$t^+ = \frac{\pi \rho + \rho \Omega t^+}{v} = \frac{\pi \rho}{v - \rho \Omega}$$

באותו אופן, נסמן ב- t^- את הזמן הדרוש לקרן הנעה נגד כוון הסיבוב להגיע לנקודה B:

$$t^- = \frac{\pi \rho - \rho \Omega t^-}{v} = \frac{\pi \rho}{v + \rho \Omega}$$

הפרש הזמנים, Δt , נתון על ידי:

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{2\pi \rho^2 \Omega}{v^2 - \rho^2 \Omega^2} \approx \frac{2\pi \rho^2 \Omega}{v^2}$$

הפרש הדרכים שעברו הקרניים, ΔL , נתון על ידי:

$$\Delta L = v \Delta t = \frac{2\pi \rho^2 \Omega}{v}$$

באופן כללי יותר, עבור צורה כלשהיא, נקבל:

$$\Delta L = \frac{2S}{v} \vec{\Omega} \cdot \hat{z}$$

כאשר S הוא שטח האינטרפרומטר ו- \hat{z} הוא וקטור אורתונורמלי למשטח האינטרפרומטר. מכאן שהפרש הפאזה, $\Delta\phi$, נתון על ידי [7]:

$$\Delta\phi = k \Delta L = \frac{4\pi S \Omega}{\lambda v}$$

יחס הרגישויות בין אינטרפרומטר אופטי (המנחה פוטונים) לאינטרפרומטר אטומי נתון על ידי [8]:

$$\frac{\Delta\phi_{atom}}{\Delta\phi_{photon}} = \frac{2 \frac{MS\Omega}{\hbar}}{2 \frac{S\Omega\omega_0}{c^2}} = \frac{Mc^2}{\hbar\omega_0} \gg 1$$

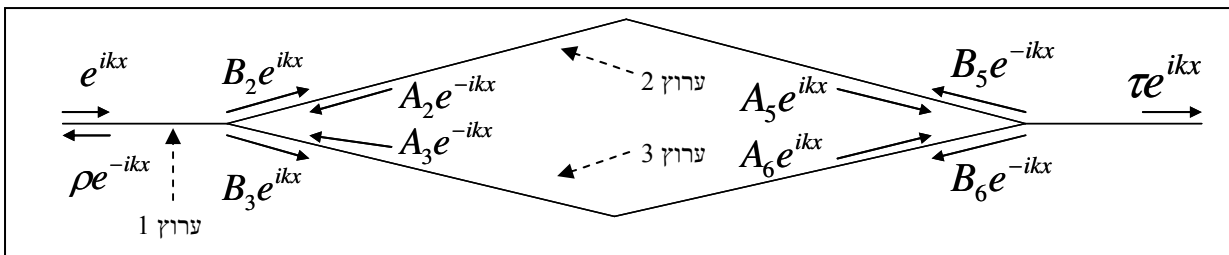
כאשר: M – מסת האטום, ω_0 – תדירות הפוטון, c – מהירות האור, \hbar – קבוע פלנק. באופן תיאורטי ניתן לצפות ליחס רגישויות $\sim 10^{10}$. בפועל נצפה ליחס רגישויות קטן יותר שכן לאינטרפרומטר האופטי יחס לרעש טוב יותר בשל שטף חלקיקים גדול יותר. כמו כן ניתן להגדיל את שטחו על ידי שימוש בסיבים אופטיים.

מטרות המחקר:

- הצגת מודל תיאורטי של Single Mode- Double Y Atomic Interferometer.
- תיאור תיאורטי של סיבוב האינטרפרומטר לקבלת אפקט Sagnac במערכת זו.
- תיאור תיאורטי של אינטרפרומטר עם הפרעה. הפרעה זו מדמה קושי מעשי בקבלת פוטנציאל מנחה חלק, במערך ניסיוני אמיתי.
- איפיון הפרמטרים של האינטרפרומטר (קצב הסיבוב, עוצמת ההפרעה) המאפשרים קבלת אינטרפרומטר רגיש יותר מאינטרפרומטר אופטי (מנחה פוטונים).
- בתום השלב הראשון תבחן אפשרות של הצגת מודל עבור: Double Mode - Double Y Atomic Interferometer [9-11]. לחילופין יוצג מודל של Single Mode – Double X Interferometer [12-13]. גם בשלב זה יאופינו הפרמטרים הדרושים להשגת רגישות גבוהה.

המודל:

נתבונן בגיאומטריה של Double Y Interferometer ובפונקציות הגל בפורמליזם של מטריצת פיזור [14]:



מדרישת האוניטריות ותחת ההנחות הבאות:

(1) הצמתים אינם סימטריים (אמפליטודת המעבר בין ערוץ 1 לערוץ 2 שווה לאמפליטודת המעבר בין ערוץ 1 לערוץ 3 אך היא אינה שווה ל אמפליטודת המעבר בין ערוצים 2 ו-3).
 (2) הפרמטרים של מטריצת הפיזור ממשיים
 תתקבל מטריצת פיזור לצומת יחיד :

$$\hat{S}_i = \begin{pmatrix} 1-2t_i & \sqrt{2(t_i-t_i^2)} & \sqrt{2(t_i-t_i^2)} \\ \sqrt{2(t_i-t_i^2)} & t_i-1 & t_i \\ \sqrt{2(t_i-t_i^2)} & t_i & t_i-1 \end{pmatrix}$$

כאשר \hat{S}_i הינה מטריצת הפיזור של הצומת ה- i ו- t_i היא אמפליטודת המעבר בין הערוצים הסימטריים.

כדי למצוא את אמפליטודת המעבר של האינטרפרומטר כולו, τ , נגדיר $A_4=0, A_1=1$ ונביע את שאר הגלים הנכנסים לכל צומת באמצעות הגלים היוצאים ובתוספת הפאזה, למשל, $A_6 \rightarrow B_3 e^{ikl}$. בדרך זו, נקבל מערכת של שש משוואות בשישה נעלמים ומפתרון המערכת נוכל לחלץ את τ . ניזכר כי המוליכות של אלקטרונים ניתנת על ידי נוסחת לנדור [15] :

$$G = \frac{e^2}{2\hbar} |\tau|^2$$

על מנת לבחון את השפעת סיבוב האינטרפרומטר על תבנית ההתאבכות ניבנה אנלוגיה בין חלקיקים טעונים בשדה מגנטי לחלקיקים במערכת מסתובבת. הכח המגנטי הפועל על חלקיק

$$\vec{F}_{Lor} = \frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{B} \quad \text{טעון:}$$

כאשר מסובבים את האינטרפרומטר, האטומים מושפעים מאפקט קוריווליס, המתבטא בכח

$$\vec{F}_{Cor} = 2m\vec{V} \times \vec{\Omega} \quad \text{אפקטיבי מהצורה:}$$

מכאן נוכל לתאר אטום הנתון ככח קוריווליס באמצעות אלקטרון הנמצא בשדה מגנטי אפקטיבי

$$\vec{B}_{eff} = \frac{2mc}{e} \vec{\Omega} \quad [16]$$

בנוסף נוכל להגדיר פוטנציאל וקטורי אפקטיבי באופן הבא :

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\Phi}{l}$$

$$\Rightarrow A_{eff} = \frac{2mc\Omega S}{el}$$

כאשר S הוא שטח האינטרפרומטר ו- l הוא אורך הזרוע.

נגדיר את ההמילטוניאן : $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(P - \frac{e}{c} A_{eff} \right)^2$ וממנו נקבל את פונקציות הגל:

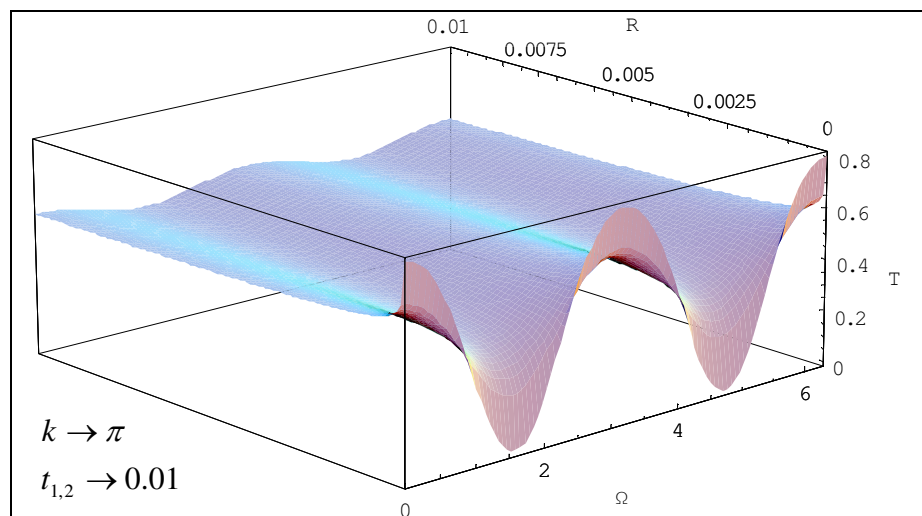
$$\Psi_{rot} = \tilde{B}_i e^{i(k \pm \frac{e}{\hbar c} A_{eff})x}$$

נפתור את מערכת המשוואות כאשר מטריצות הפיזור נותרות ללא שינוי (הסיבוב בא לידי ביטוי בפונקציית הגל). מפתרון זה נקבל את המוליכות כתלות באנרגיה של החלקיק ובקצב סיבוב האינטרפרומטר.

הכנסת מחסום פוטנציאל לאחת מזרועות האינטרפרומטר תיצור הפרעה. על מנת לטפל בהפרעה נשתמש במטריצת הפיזור של מחסום הפוטנציאל על מנת להגדיר את פונקציות הגל בכל צמת. נקבל שוב מערכת משוואות. פתרון המערכת ייתן את המוליכות כתלות באנרגיה של החלקיק, באמפליטודת החזרה של הפוטנציאל ובקצב סיבוב האינטרפרומטר.

התקדמות :

כתבנו מודל המתאר Single Mode- Double Y Atomic Interferometer. המודל מתאר סיבוב של האינטרפרומטר וקבלת אפקט סניאק. כמו כן המודל לוקח בחשבון הפרעה בפוטנציאל המנחה. כפי שניתן לראות בגרף 1, עבור החזרה $R=0$, ישנה מחזוריות במוליכות התלויה בקצב סיבוב האינטרפרומטר. עבור קצבי סיבוב מסויימים מתקבלת מוליכות מלאה ועבור קצבי סיבוב אחרים החזרה מלאה. ישנה ירידה חדה באמפליטודת המוליכות (ומכאן שגם בהחזרה) של האינטרפרומטר כבר עבור החזרה קטנה, R , של המפזר אך המחזוריות בתדירות הסיבוב, Ω , נשמרת.



גרף מס' 1 : מוליכות אטומים דרך האינטרפרומטר כתלות בקצב סיבוב האינטרפרומטר Ω ובהחזרה הנגרמת על ידי ההפרעה - R .

רשימת מקורות :

- [1] D. E. Pritchard *et al*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2693 (1991)
- [2] O. Carnal and J. Mlynek, Phys. Rev. Lett. **66**, 2689 (1991)
- [3] M. A. Kasevich and S. Chu, Phys. Rev. Lett. **67**, 181 (1991)
- [4] C. J. Borde *et al*, Phys. Rev. Lett. **67**, 177 (1991)
- [5] D. M. Giltner, R. W. McGowan and S. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **75**, 2638 (1995)
- [6] W. Ketterle *et al*, Phys. Rev. Lett. **92**, 050405 (2004)

- [7] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997)
- [8] P. Storey and C. Cohen-Tannoudji, *Journal de Physique II* **4**, 1999 (1994)
- [9] R. Folman *et al*, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 263 (2002)
- [10] E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo and J. Schmiedmayer
Phys. Rev. Lett. **88**, 100401 (2002)
- [11] D. M. Greenberger and A. W. Overhauser, *Rev. Mod. Phys* **51**, 43 (1979)
- [12] M. D. Girardeau, K. K. Das and E. M. Wright, *Phys. Rev. A.* **66**, 23604 (2002)
- [13] E. Andersson *et al*, *Phys. Rev. A* **59**, 3841 (1999)
- [14] Y. Gefen, Y. Imry and Y. Azbel, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 129 (1984)
- [15] The Landauer formula is reviewed in many papers, for example Y. Imry and R.
Landauer, *Rev. Mod. Phys.* **71**, s306, Centenary 1999
- [16] J.J. Sakurai, *Phys. Rev. D* **21**, 2293 (1980)