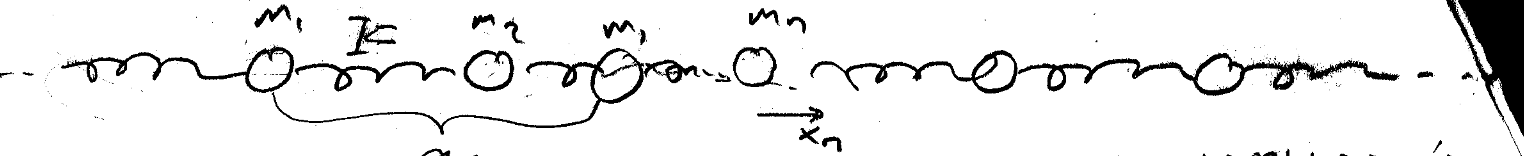


מש' התנועה:

$$m_n \ddot{x}_n = -K(x_n - x_{n-1}) - K(x_n - x_{n+1}) = -K(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1})$$

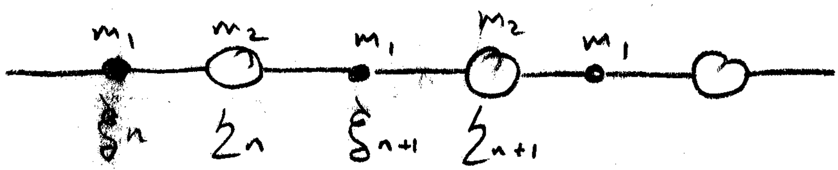
x_n - ההעתקה של המסה m_n מנק' שיווי המשקל שלה.

ניפטר מהאינדקסים של המסות:

נגדיר

$$x_{2n} = \xi_{2n} \quad \text{for} \quad m_{2n} = m_1$$

$$x_{2n+1} = \zeta_{2n+1} \quad \text{for} \quad m_{2n+1} = m_2$$



$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{\xi}_n + K(2\xi_n - \zeta_{n-1} - \zeta_n) = 0 \\ m_2 \ddot{\zeta}_n + K(2\zeta_n - \xi_n - \xi_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

ננחש פתרון מהצורה:

$$\xi_n = \xi_0 e^{i(kna - \omega t)}$$

$$\zeta_n = \zeta_0 e^{i(kna - \omega t)}$$

ונציב למשוואות הנ"ל:

$$\Rightarrow -m_1 \omega^2 \xi_0 + K\left(2\xi_0 - \zeta_0\left(1 + e^{-ika}\right)\right) = 0$$

$$-m_2 \omega^2 \zeta_0 + K\left(2\zeta_0 - \xi_0\left(1 + e^{ika}\right)\right) = 0$$

או בצורה מטריצית:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + 2K & -K(1 + e^{-ika}) \\ -K(1 + e^{ika}) & -m_2\omega^2 + 2K \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = 0$$

מחפשים פתרון לא טריוויאלי $\Leftarrow$ $\det A = 0$

$$\Rightarrow \left(-m_1\omega^2+2K\right)\left(-m_2\omega^2+2K\right) - K^2\left(1+e^{-ika}\right)\left(1+e^{ika}\right) = 0$$

$$+m_1m_2\omega^4 - 2K(m_1+m_2)\omega^2 + 2K^2(1-\cos ka) = 0$$

$$\omega^4 - 2K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\omega^2 + \cancel{2}4K^2\frac{1}{m_1m_2}\sin^2\frac{ka}{2} = 0$$

$$\omega^2 = K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \pm K\sqrt{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{4}{m_1m_2}\sin^2\frac{ka}{2}} \qquad (*)$$

עבור $k\sim 0$

$$\omega_\pm^2(k=0) = \begin{cases} 2K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \\ 0 \end{cases}$$

בגבול הרציף: $ka\to 0 \Leftarrow$

$$\sin^2\frac{ka}{2} \to \frac{k^2a^2}{4}$$

$$\omega_+^2 = K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) + K\sqrt{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{k^2a^2}{m_1m_2}} \simeq$$

$$\simeq K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) + K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} + O(k^2)\right) =$$

$$= 2K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - \frac{1}{2}K\frac{k^2a^2}{m_1+m_2}$$

$$\omega_-^2 = K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - K\sqrt{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{k^2a^2}{m_1m_2}} =$$

$$\simeq K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - K\left(\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - \frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{\cancel{m_1m_2}}\frac{\cancel{m_1m_2}}{m_1+m_2}\right) \simeq$$

$$= \frac{1}{2}K\frac{k^2a^2}{m_1+m_2} \equiv \frac{1}{2}K\frac{k^2a^2}{m_1+m_2}$$

אורך הגל המינימלי הוא $\lambda_{min} = 2a \Rightarrow k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{a}$

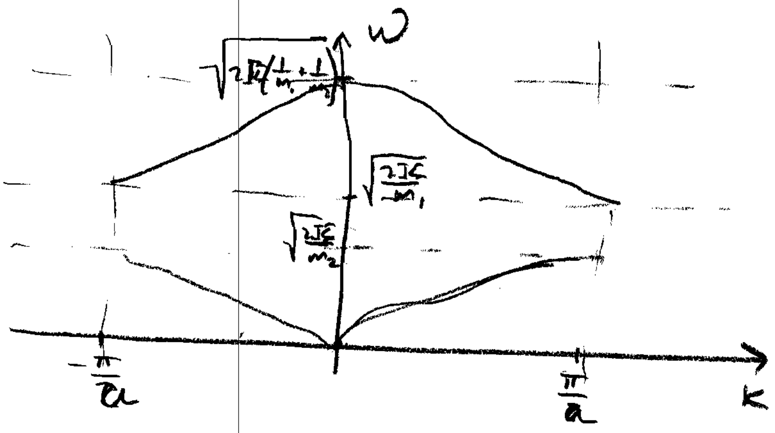
* עבור $k = \frac{\pi}{2a}$:

$$\omega_\pm^2 = K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \pm K\sqrt{\frac{m_1^2+2m_1m_2+m_2^2}{m_1^2m_2^2} - \frac{4}{m_1m_2}} =$$

$$= K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \pm K\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)$$

$$\omega_+\left(k=\pm\frac{\pi}{a}\right)=\frac{2K}{m_1} \qquad \omega_+(k=0)=2K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$

$$\omega_-\left(k=\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2K}{m_2} \qquad \omega_-(k=0)=0$$



נניח $m_1<m_2$

* לא ניתן לעורר את המערכת בין ש $\sqrt{\frac{2K}{m_2}}<\omega<\sqrt{\frac{2K}{m_1}}$

* היחס בין האמפליטודות של שני מסות שכנות ב- $k=0$:

$$\begin{pmatrix}-m_1\omega_i^2+2K & -2K\\ -2K & -m_2\omega^2+2K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \zeta_0\end{pmatrix}=0$$

עבור "+": $\omega_+(k=0)=2K\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$:

$$\begin{pmatrix}\cancel{-1}-\frac{m_1}{m_2}\cancel{+1} & -1\\ -1 & \cancel{-1}-\frac{m_2}{m_1}\cancel{+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \zeta_0\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \xi_0/\zeta_0=-m_2/m_1$$

עבור "-": $\omega_-(k=0)=0$:

$$\begin{pmatrix}2K & -2K\\ -2K & 2K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \zeta_0\end{pmatrix}=0$$

$$\xi_0=\zeta_0$$

* מקרה $m=m_1=m_2$

$$\omega_\pm^2=\frac{2K}{m}\pm K\sqrt{\frac{4}{m^2}-\frac{4}{m^2}\sin^2\frac{ka}{2}}=$$

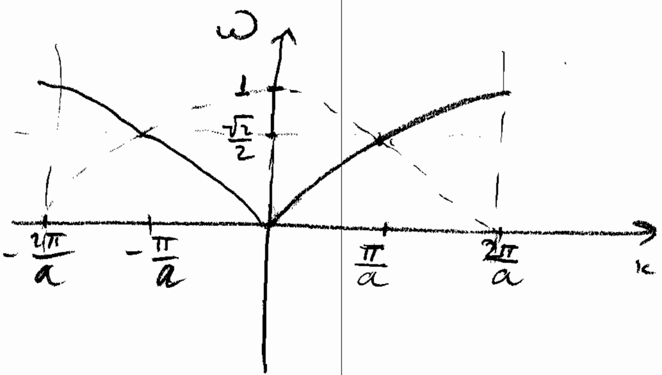
$$=\frac{2K}{m}\pm\frac{2K}{m}\sqrt{\cos^2\frac{ka}{2}}=\frac{2K}{m}\left(1\pm\cos\frac{ka}{2}\right)=$$

$$=\frac{4K}{m}\begin{cases}\cos^2\frac{ka}{4}\\ \sin^2\frac{ka}{4}\end{cases}$$

בחישוב ישיר של $\omega(k)$ עבור שרשרת מסות זהות ניתן להראות כי:

$$\omega^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$$

יש לשים לב כי עבור השרשרת עם המסות המתחלפות k היה מוגדר כ-k' של תת השרשרת לכן במקרה של $m_1 = m_2$ השרשרת היא למעשה בעלת מרחק בין המסות $\frac{a}{2}$ ולכן $k_{max} = \frac{2\pi}{a}$.

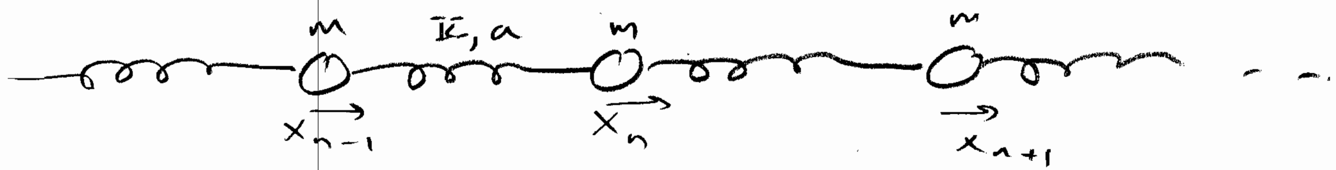


$$a' \equiv \frac{a}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}}\begin{cases}\cos\frac{ka}{4}\\ \sin\frac{ka}{4}\end{cases}$$

$$0 < k < \frac{\pi}{a'}$$

— חישוב ישיר של שרשרת של גופים זהים



$$m\ddot{x}_n = -K(x_n - x_{n-1}) + K(x_{n+1} - x_n)$$

מנחשים:

$$x_n = x_0 e^{i(\omega t - kna)}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$$