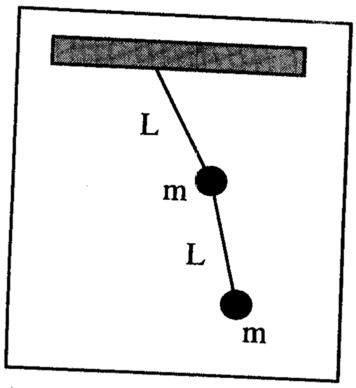
בוחן בפיסיקה 3
203-1-2121

11.12.2005
מרצה: פרופ' יגאל מאיר
משך הבחינה: שעתיים
חומר עזר: אין

ענו על שתי השאלות הבאות

שאלה 1

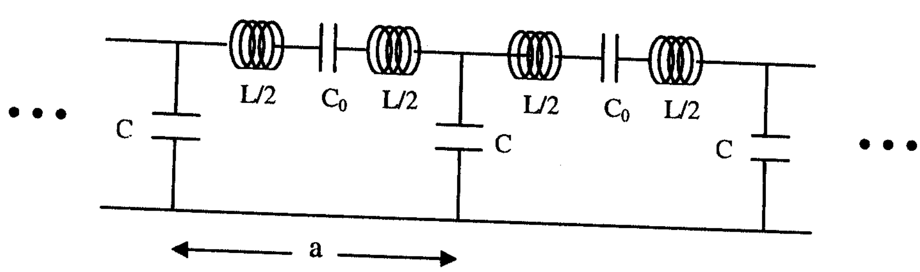


2 מסות (בעלות מסה שווה m) תלויות בקצות מוטות קשיחים זהים באורך L כל אחד. המוט התחתון יכול להסתובב ללא חיכוך סביב המסה העליונה. תנועת המוטות רק במישור הדף. נתאר ב-ϑ_1 ו-ϑ_2 את הסטיה של המוט העליון והמוט התחתון מהאנך, בהתאמה.

א. חשב את המתיחות בכל אחד מהמוטות עבור ϑ_1 ו-ϑ_2 מסוימים.
ב. חשב את הכוח שפועל על כל אחת מהמסות באחד הצירים, ומכאן חשב את משוואות התנועה עבור ϑ_1 ו-ϑ_2.
ג. חשב את אופני התנודה של המערכת בהנחה של תנודות קטנות.
ד. מתחילים המצב שבו $\vartheta_1=\vartheta_2$ (המוטות בקו ישר הסוטה מהאנך). האם המוטות ימשיכו לנוע כקו ישר ? אם לא, מתי יגיעו ל $\vartheta_2= -\vartheta_1$?

שאלה 2

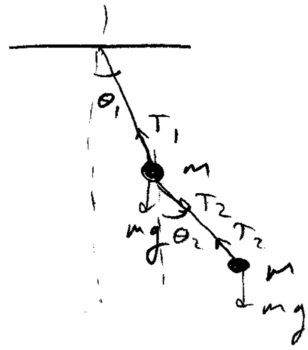
נתון קו התמסורת הבא:



א. חשב את יחס הנפיצה של המערכת, $\omega(k)$, בגבול הרצף, $a\to 0$ (כאשר C/a, L/a ו-C_0/a נשארים קבועים).
ב. מהי מהירות הפאזה ? האם היא יכולה להיות גדולה ממהירות האור ?
ג. האם המערכת יכולה לשמש כפילטר ? אם כן עבור תדירויות גבוהות או נמוכות ?

בהצלחה

בקירוב של זוויות קטנות אין תנועה בציר y... שאלה 1



$x_1 = l\sin\theta_1 \approx l\theta_1$

$y_1 = l(1-\cos\theta_1) \approx 0$

$x_2 = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) \approx l(\theta_1+\theta_2)$

$y_2 = l(2-\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \approx 0$

התנועה היא רק בציר ה-x בקירוב (סדר ראשון)

$F_1 = -T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 \approx -T_1\theta_1 + T_2\theta_2$

$F_2 = -T_2\sin\theta_2 \approx -T_2\theta_2$

בזוויות קטנות: $T_1 \approx 2mg \quad , T_2 \approx mg$

$m\ddot{x}_1 \approx ml\ddot{\theta}_1 \approx -mg(2\theta_1 - \theta_2) \qquad \theta_1 = x_1/l$

$m\ddot{x}_2 \approx ml(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \approx -mg\,\theta_2 \qquad x_2 = x_1 + l\theta_2$

$\theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l}$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}(2\theta_1 - \theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 = 2\frac{g}{l}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \qquad \omega_0^2 \equiv g/l$$

$\theta_1 = c_1\cos(\omega t + \varphi)$

$\theta_2 = c_2\cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)\theta_1 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \\ 2\omega_0^2 - (2\omega_0^2 - \omega^2)\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega_0^4 = 0$

$2\omega_0^2 - \omega^2 = \pm\sqrt{2}\,\omega_0^2 \Rightarrow \omega_\pm = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\,\omega_0$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \omega_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{normal modes}$$

שאלה 1 - המשך

התנועה הכללית היא הסופרפוזיציה של המודים:

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = A_1\vec{V}_1\cos(\omega_1 t+\varphi) + A_2\vec{V}_2\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

תנאי התחלה: $\underline{\theta_1=\theta_2}$

$$A_1+A_2 = -\sqrt{2}A_1+\sqrt{2}A_2$$

$$A_1(1+\sqrt{2}) = A_2(\sqrt{2}-1) \qquad \varphi=0$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}A_2$$

רוצים להגיע למצב: $\underline{\theta_1=-\theta_2}$

$$A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t = \sqrt{2}A_1\cos\omega_1 t - \sqrt{2}A_2\cos\omega_2 t$$

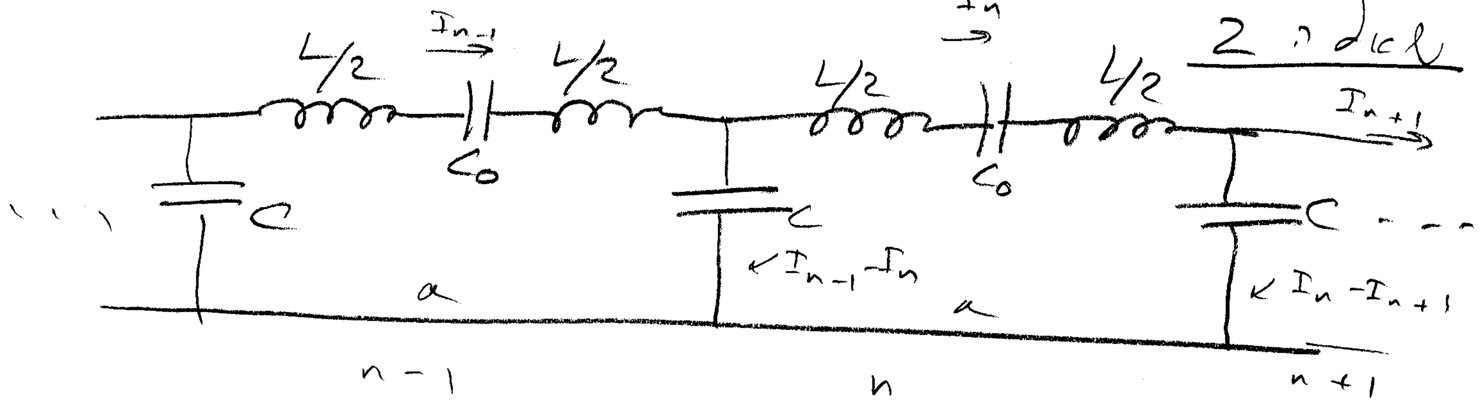
$$A_1(1-\sqrt{2})\cos\omega_1 t = -A_2(\sqrt{2}+1)\cos\omega_2 t$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}(1-\sqrt{2})\cos\omega_1 t = -(\sqrt{2}+1)\cos\omega_2 t$$

$$\Rightarrow \underline{(\sqrt{2}-1)^2\cos\omega_1 t = (\sqrt{2}+1)^2\cos\omega_2 t}$$

המצב יתקיים בזמני t המקיימים את המשוואה הנ"ל.

שאלה 2



1ג) יחס הנפיצה

$$\frac{L}{2}\ddot{I}_n+\frac{1}{C_0}I_n+\frac{L}{2}\ddot{I}_n+\frac{1}{C}(I_n-I_{n+1})-\frac{1}{C}(I_{n-1}-I_n)=0$$

$$-L\ddot{I}_n=\frac{1}{C_0}I_n+\frac{1}{C}(2I_n-I_{n+1}-I_{n-1})$$

$$\ddot{I}_n+\frac{1}{LC_0}I_n+\frac{1}{LC}(2I_n-I_{n+1}-I_{n-1})=0$$

$$I_n=Ae^{ikna}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{I}_n=-\omega^2 I_n$$

$$\Rightarrow -\omega^2+\frac{1}{LC_0}+\frac{1}{LC}(2-e^{ika}-e^{-ika})=0$$

$$\omega^2=\frac{1}{LC_0}+\frac{1}{LC}(2-2\cos ka)=$$

$$\underline{\omega^2(k)=\frac{1}{LC_0}+\frac{4}{LC}\sin^2\frac{ka}{2}}$$

$$\omega^2(k)=\frac{1}{LC_0}+\frac{4}{LC}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}\right)^2}_{\to 1}\frac{k^2a^2}{4}\approx \qquad \underline{a\to 0}$$

$$\approx\frac{1}{LC_0}+\frac{k^2}{\frac{L}{a}\cdot\frac{C}{a}}$$

מהירות הפאזה:

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\sqrt{\frac{1}{LC_0}+\frac{k^2}{\frac{L}{a}\cdot\frac{C}{a}}}}{k}=\sqrt{\frac{1}{LC_0k^2}+\frac{1}{\frac{L}{a}\cdot\frac{C}{a}}}$$

מהירות הפאזה תהיה גדולה יותר ממהירות האור, אלא אם כן $LC_0\to\infty \iff \frac{1}{LC_0}=0$.

המערכת היא High Pass Filter - היא מעבירה תדרים גדולים מ- $\sqrt{\frac{1}{LC_0}}$.