פתרון מבחן פיסיקה 3

22.6.04

1) א. $u = \frac{0.6+0.8}{1+0.6\cdot 0.8}c = 0.946c$

ב. אורך המטוס לפי הדוללת הוא $100\sqrt{1-0.6^2} = 80_m$

ולכן הזמן הדרוש לה לעבור את המטוס $\frac{80}{0.6\cdot 3\cdot 10^8} = 0.44\,\mu sec$

ג. (ק) הוא זמן עצמי (של שעון אחד) ולכן הזמן במע' כדור הארץ

הנע במהירות יחסית $0.946c$ הוא $\frac{0.44}{\sqrt{1-0.946^2}} = 1.357\,\mu sec$

ד. נוסע אני הציון במרחק $70\sqrt{1-0.6^2} = 56_m$ במע' הדוללת.

הדוללת מתקרבת בזמן $0.3\mu sec$ מרחק של $0.6\cdot 3\cdot 10^8\cdot 0.3\cdot 10^{-6} = 54_m$

ולכן איננה יכולה להגיע לו תפילים.

2) א. $I_1 = \frac{1}{T}A^2\int_0^T \frac{1}{2}(1+\cos(2kx-2\omega t+2\varphi_1))\,dt$

$= \frac{1}{2T}A^2\left(T + \sin(2kx-2\omega t+\varphi_1)\cdot\frac{-1}{2\omega}\Big]_0^T \right) = \frac{1}{2}A^2$

כי $\omega T = 2\pi$ ו־ sin מחזורית ב־ 2π.

ב. העוצמה הכללית מקסימלית כאשר הגלים מתחברים עם מקסימום

באותו מקום, כלומר (נניח $A,B>0$) $\Delta\varphi = 2\pi n$, n שלם.

העוצמה מינימלית אם הגלים הפוכים בנקודות המקסימום $\Delta\varphi = \pi(2n+1)$

ג. I_{max} הוא בדיוק המשולב (א) עבור אמפליטודה שהיא

עכשיו $A+B$: $I_{max} = \frac{1}{2}(A+B)^2$

I_{min} האמפליטודה היא $A-B$: $I_{min} = \frac{1}{2}(A-B)^2$

$$I_{max}/I_{min} = \frac{(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2}{(\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2})^2}$$

3) א. חשוב לא רלטיביסטי עבור האטום: האנרגיה ΔE הופכת

לאנרגיה קינטית $P_0^2/2m_0$ ולאנרגית פוטון $h\nu$: $\Delta E = \frac{P_0^2}{2m_0} + h\nu$

(ניתן להוסיף m_0c^2 לשני האגפים, אם רוצים).

תנע הפוטון $h\nu/c$ ומשמור התנע $P_0 = -h\nu/c$

כך $\Delta E = h\nu + \frac{(h\nu)^2}{2m_0c^2}$

יש לפתור משוואה ריבועית עבור $h\nu$, אך מכיון ש $\Delta E \ll m_0c^2$

ΔE קרוב מאוד ל $h\nu$ ובתיקון בסדר ראשון ניתן להחליף את $h\nu$

ב ΔE: $h\nu = \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2m_0c^2}$

ב. נתון $\Delta p \ll P_0$ עבור האטום, ולכן

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} \gg \frac{\hbar}{2P_0} = \frac{\hbar c}{2h\nu} = \frac{6\cdot10^{-16}\cdot3\cdot10^{8}}{2\cdot10} m = 0.9\cdot10^{-8} m$$

מכיון ש $\frac{\hbar c}{2h\nu} = \frac{c}{4\pi\nu} = \frac{\lambda}{4\pi}$ אי הוודאות במקום של האטום

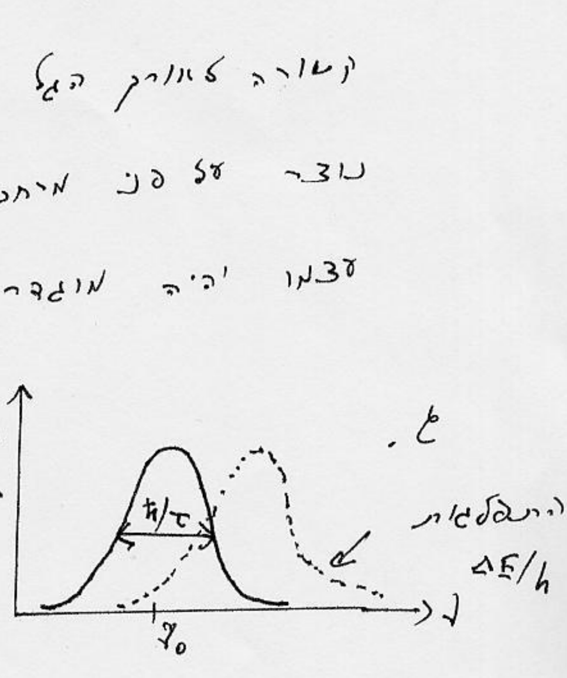
קשורה לאורך הגל λ של הפוטון. הסיבה היא שהפולס הפוטוני

נוצר על פני מרחק של הרבה λ, כלומר $\lambda \ll \Delta x$, כדי ש-λ

עצמו יהיה מוגדר היטב, ואז אמנם אי הוודאות בתנע הפוטון

$\Delta(h\nu/c) = \Delta p \ll P_0$.

ג.



למרחק בין הרמות יש אי וודאות

$\hbar/\tau$ ולכן גם להתפלגות ב $h\nu$.

נקודת השיא נמצאת בקירוב (א) בתדר ν_0

$\nu_0 = \left(\Delta E - \frac{\Delta E^2}{2m_0c^2}\right)/h$

אם הרוחב $\hbar/\tau$ מספיק קטן ניתן להבחין

בהזזה, כלומר דרוש $\hbar/\tau \ll \frac{\Delta E^2}{2m_0c^2}$

(4)

$$\Psi_0(x) = C e^{-\frac{ax^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0^*(x)\, \Psi_0(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot C e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{ax^2}{2}\right)^2} dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = 1$$

$$C^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = 1 \Rightarrow C^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \Rightarrow \boxed{C = \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \qquad p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\, e^{-\frac{ax^2}{2}} x^2 \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\, e^{-\frac{ax^2}{2}} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} = \frac{1}{2a}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2a}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot x \cdot e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} \, dx =$$

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\boxed{\delta x = \sqrt{\frac{1}{2a} - 0} = \frac{1}{\sqrt{2a}}}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}} \left(-i\hbar \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\right) e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \left(-\frac{a}{2} \cdot 2x \cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \, -i\hbar \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot 2 \left(x \cdot e^{-ax^2}\right) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{\pi}} (+i\hbar) \cdot a \left(x \cdot e^{-ax^2}\right) = 0$$

$$\langle p \rangle^2 = 0$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\, e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) = -\hbar^2 \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\, \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \left(\frac{-a}{2}\right)\cdot 2x\right) =$$

$$= -\hbar^2 \sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\,(-a)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) =$$

$$= -\sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\,\hbar^2(-a)\left[e^{-\frac{ax^2}{2}} + x\cdot\left(\frac{-a}{2}\right)\cdot 2x\cdot e^{-\frac{ax^2}{2}}\right] =$$

$$= -\sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\,\hbar^2(-a)\left[e^{-\frac{ax^2}{2}} - ax^2 e^{-\frac{ax^2}{2}}\right]$$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-i^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right)dv =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\, e^{-\frac{ax^2}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{\pi}}\,-\hbar^2(-a)\left[e^{-\frac{ax^2}{2}} - ax^2 e^{-\frac{ax^2}{2}}\right]dx =$$

$$-\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\hbar^2(-a)\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ax^2} - ax^2 e^{-ax^2}\right)dv =$$

$$-\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\hbar^2(-a)\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\cdot a\right] =$$

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\hbar^2\cdot a\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\hbar^2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\cdot a =$$

$$\hbar^2 a - \frac{\hbar^2 a^2}{2a} = \hbar^2 a - \frac{\hbar^2 a}{2} = \frac{\hbar^2 a}{2}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2 a}{2}$$

$$\boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{2} - 0} = \hbar\sqrt{\frac{a}{2}}}$$

ג. עיקרון אי הודאות

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\Delta p = \frac{\hbar\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{\hbar\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

3. פונקציית הגל מתארת אוסילטור הרמוני, ברמת היסוד.

ה.
$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{1}{6}} A \psi_1 e^{-i\varepsilon_1 \frac{t}{\hbar}} + \frac{A}{2\sqrt{3}} \psi_2 e^{-i\varepsilon_2 \frac{t}{\hbar}} + \frac{A}{2} \psi_3 e^{-i\varepsilon_3 \frac{t}{\hbar}}$$

כדי למצוא את המקדם A נשתמש בעיקרון האורתונורמליות

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^* \psi_j \, dx = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\Psi(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{6}} A \psi_1^* e^{i\varepsilon_1 \frac{t}{\hbar}} + \frac{A}{2\sqrt{3}} \psi_2^* e^{i\varepsilon_2 \frac{t}{\hbar}} + \frac{A}{2} \psi_3^* e^{i\varepsilon_3 \frac{t}{\hbar}}\right) \times$$
$$\left(\sqrt{\frac{1}{6}} A \psi_1 e^{-i\varepsilon_1 \frac{t}{\hbar}} + \frac{A}{2\sqrt{3}} \psi_2 e^{-i\varepsilon_2 \frac{t}{\hbar}} + \frac{A}{2} \psi_3 e^{-i\varepsilon_3 \frac{t}{\hbar}}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}A^2 + \frac{1}{12}A^2 + \frac{1}{4}A^2 = 1$$

$$\frac{2+1+3}{12}A^2 = 1 \Rightarrow \frac{6}{12}A^2 = 1 \Rightarrow \boxed{A^2 = \sqrt{2}}$$

$$\langle E\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{E}\, \Psi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi\, dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\cdot\sqrt{2}\, \psi_1^* e^{+i\varepsilon_1 \frac{t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \psi_2^* e^{i\varepsilon_2 \frac{t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_3^* e^{i\varepsilon_3 \frac{t}{\hbar}}\right) \times$$

$$\times\, i\hbar \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\sqrt{2}\, \psi_1 \cdot \left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_1\right) e^{-i\varepsilon_1 \frac{t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{-i}{\hbar}\varepsilon_2\right) e^{-i\varepsilon_2 \frac{t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\varepsilon_3\right) e^{-i\varepsilon_3 \frac{t}{\hbar}}\right) dx$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}\sqrt{2}\right)^2 \varepsilon_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2 \varepsilon_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \varepsilon_3 =$$

$$\frac{2}{6}\varepsilon_1 + \frac{2}{12}\varepsilon_2 + \frac{2}{4}\varepsilon_3$$

מכיוון שמדובר באוסצילטור הרמוני האנרגיה מוגדרת כ-

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \quad E_1 = \tfrac{3}{2}\hbar\omega$$

$$E_2 = \tfrac{5}{2}\hbar\omega$$

$$E_3 = \tfrac{7}{2}\hbar\omega$$

לכן האנרגיה הממוצעת היא:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\hbar\omega =$$

$$\frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{5}{12}\hbar\omega + \frac{7}{4}\hbar\omega = 2\frac{2}{3}\hbar\omega$$

$$\boxed{\langle E\rangle = \frac{8}{3}\hbar\omega}$$