מבחן פיסיקה 3 – מועד ב' (2006)

מרצה: רון פולמן

לרשותך 3 שעות שבהן עליך לפתור 4 שאלות שכל אחת שווה 25 נקודות. עליך לבחור 3 שאלות מתוך הארבע שמופיעות שחלק א' ושאלה אחת מתוך השתיים שמופיעות בחלק ב'. השאלות בחלק ב' קשות יותר לפתרון. הניקוד עבור כל סעיף מופיע בסוגריים. לבסוף ישנה שאלת בונוס ששויה 10 נקודות (+הערכתי הרבה). אין להשתמש בכל חומר עזר מלבד דף הנוסחאות שמחולק על ידי הבוחנות.
אין להשתמש במחשבון (לא נידרש להגיע לדיוקים גבוהים בתוצאות). בהצלחה.

חלק א' (ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות)

1. קוונטים

נתון חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי בעל רוחב L (הנח שהבור מתחיל ב- x=0).

א. (10) מצא/י ביטוי כללי עבור פונקצית הגל של המצבים העצמיים ונרמל/י את הביטוי.

ב. (10) פתח/י את הביטוי עבור ערכי האנרגיה של המצבים העצמיים השונים.

ג. (5) אם האטום הוא בעצם בור פוטנציאל אינסופי עבור האלקטרון, הערך/י את האנרגיה הבסיסית של האלקטרון באטום המימן בהנחה שגודלו בערך חצי אנגסטרום.

פתרון: (L=a)

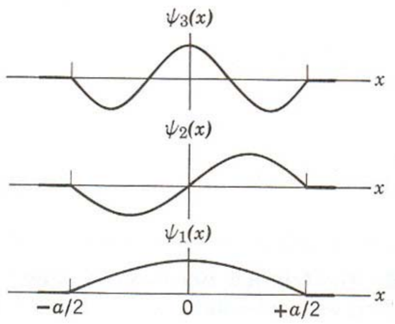


Figure 6-31 The first few eigenfunctions of infinite square well potential.

אם הבור ממוקם סימטרית מסביב לראשית הצירים

Solution of time-independent schrodinger eq.: $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x)+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x)$ is:

$$\Psi(x)=\begin{cases} A\sin(kx)+B\cos(kx) & \text{for } -a/2<x<a/2 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

in order to obtain boundary conditions : $\Psi(-a/2)=\Psi(a/2)=0$

we get: $\sin\left(k\frac{a}{2}\right)=0$ or $\cos\left(k\frac{a}{2}\right)=0$

from this we obtain to different k's, which leads to different energies and different wave functions (remember that E=hbar^{2}k^2/2m):

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_n x) \qquad ; \qquad \Psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\cos(k_n x)$$

$$\mathrm{k}=\frac{\pi(\mathrm{n})}{a} \quad (\mathrm{n}=2,4,6,\ldots\mathrm{even}) \qquad ; \qquad \mathrm{k}=\frac{\pi(\mathrm{n})}{a} \quad (\mathrm{n}=1,3,5,\ldots\mathrm{odd})$$

$$E_n=\frac{\hbar^2\pi^2(\mathrm{n})^2}{2ma^2} \qquad (\mathrm{n}=1,2,3,4....)$$

לחליפין (אם נזיז את הבור כך שיתחיל בראשית הצירים) אנו מחפשים פונקציות שמתאפסות ב-0 וב-L בגלל תנאי השפה. אלה הן פונקציות $A\sin kx$. כדי לקיים את התנאי ב-L חייב להתקיים $k=\frac{2\pi n}{L}$ באשר n מספר שלם. הקבוע A נמצא מתוך הנרמול:

$\int_0^L A^2\sin^2(kx)dx=1$. מכאן $A=\sqrt{\frac{2}{L}}$. לבסוף: $\psi_n=A\sin kx$

ב. ע"י הצבת $k=\frac{2\pi n}{L}$ במשוואה $E=(k\ \mathrm{hbar})^2/2m$ מקבלים: $E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}$.

ג. ניקח L כחצי אנגסטרם ונציב בנוסחא של האנרגיה עם n=1. נקבל $E_1\approx 2*10^{-17}J\approx 100eV$

2. חלקיקים

א. (5) הסבר מהי קרינת אלפא.

קרינת אלפא זו קרינה המורכבת מחלקיקים המורכבים משני פרוטונים ושני נויטרונים (גרעיני הליום 4 שיוצא מהגרעין ואף החוצה מהאטום.

ב. (5) הסבר מדוע לדעתך מתרחשת קרינה זו. השתמש בעמק היציבות.

האם סוג החומר משתנה בעקבות קרינה זו? פרט.

בקרינת אלפא משתחרר גרעין של הליום 4 (שני פרוטונים ושני נויטרונים) מגרעין האם. גרעין האם משתנה כתוצאה מזה.

$${}_Z X^A \rightarrow {}_{Z-2}X^{A-4} + {}_2X^4$$

התפרקות אלפא מתרחשת באטומים לא יציבים, כלומר אלו הלא שייכים לעמק היציבות במטרה להגיע לאיזון יותר טוב בין מספר הפרוטונים והנויטרונים. האיזון האופטימלי והיציב מושג בעמק היציבות.

ג. (15) מצא כמה אנרגיה יש להשקיע בשביל שחלקיק אלפא יאבד נויטרון.

עבור חישוב זה יש להשתמש בהפרש של 7.1-2.6Mev/A בגרף (איור 2.1 בדף הנוסחאות) של אנרגית הקשר בין He^4 לבין He^3. האנרגיה המינימלית היא איפוא (אנרגיה קינטית אפס):

[2Mp+Mn-3*2.6]+Mn - [2Mp+2Mn-7.1*4]= 7.1*4-2.6*3=20.6MeV (+/-3 because of the resolution of reading the graph).

3. יחסות

א. (10) אקדח יורה כדור במהירות לוע (מהירות ביחס לאקדח) של 0.9c. אדם שטס על מטוס שמהירותו ביחס לכדור הארץ גם 0.9c מחזיק בידו את האקדח ויורה מהאקדח בכיוון טיסת המטוס. חשב את מהירות הכדור ביחס לכדור הארץ.

Convince yourself that you can never pass the speed of light,

e.g. 0.9C bullet from a 0.9C jet.

Lorentz: U'x=(Ux-V) / (1- VUx/C2)

V is the velocity of the second frame (in this case earth which is moving in the negative direction)

Namely, in our case: U'x=(0.9c+0.9c)/(1+0.9c 0.9c/c2)=1.8/1.81

ב. (15) מטאוריט שמסתו Kg $10^{\wedge-8}$ חולף על פני כדור הארץ במהירות 0.01c. איזה אנרגיה ותנע ימדוד מדען לגבי מטאוריט זה אם המדען נמצא על חללית שטסה באותו כיוון כמו המטאוריט במהירות 0.9c ביחס לכדור הארץ?

$m_0=10^{-8}$ moves past earth at U=0.01C.

Lets think: S=earth, S'=spaceship V=0.9C

(at 0.01c we can use the classical equation for kinetic energy $1/2mV^2$)

$E\sim 1/2\ m_0\ U^2+\ m_0c^2=10^{-8}\ [(0.01c)^2/2 + c^2]=1.00005\ 10^{-8}\ c^2$ J

$p_x=mU_x=10^{-8}\ 0.01c=10^{-10}c$ kg m/s.

For this situation we have $\gamma=2.29$

$E'=\gamma(E-Vp_x)=2.29\ [1.00005\ 10^{-8}\ c^2 - 0.9c\ 10^{-10}\ c]=2.27\ 10^{-8}\ c^2$ J

$p'_x=\gamma(p_x-VE/c^2)=2.29\ [10^{-10}c - (0.9c\ 1.00005\ 10^{-8}\ c^2)/c^2]= -2.038\ 10^{-8}$ c kg m/s.

4. קוונטים

ניסוי האפקט הפוטו-אלקטרי

א. (5) תאר את מהלך הניסוי והסבר מדוע הראייה הקלאסית של האור עומדת בסתירה לתוצאות הניסוי.

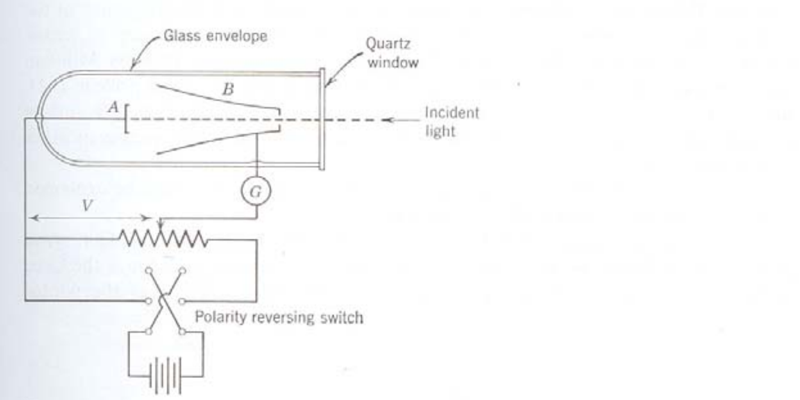


Figure 2-1 An apparatus used to study the photoelectric effect. The potential difference V can be varied continuously in magnitude, and also reversed in sign by the switching arrangement. If the same metal is used to make plate A and cup B then the potential difference between them equals the value of V measured with a voltmeter between the points indicated in the figure. But if this is not the case then the measured value of V must be corrected by adding to it the *contact potential* acting between the two metals in order to obtain the quantity of interest—the potential difference between A and B. The phenomenon of contact potential is explained in Chapter 11.

התצפית הראשונה שסותרת את ההבנה הקלאסית היא העובדה שמיד עם הדלקת האור משתחררים אלקטרונים מהמתכת. אילו האור היה גל שהאנרגיה האגורה בו מתפזרת בצורה שווה על פני כל השטח שבו האור פוגע, אזי אטום בודד היה מקבל מספיק אנרגיה בשביל לבצע יינון (פליטת אלקטרון) רק לאחר זמן יחסית ממושך.

ב. (10) צייר 2 גרפים של תוצאות הניסוי: 1. הזרם בשפופרת כפונקציה של המתח בין האלקטרודות (עבור שתי עוצמות שונות של האור הפוגע). 2. המתח העוצר (קרי שגורם לזרם להתאפס) כפונקציה של תדירות האור. ציירו בדייקנות והסבירו.

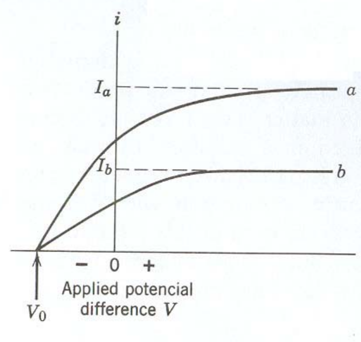


Figure 2-2 Graphs of current i as a function of potential difference V from data taken with the apparatus of Figure 2-1. The applied potential difference V is called positive when the cup B in Figure 2-1 is positive with respect to the photoelectric surface A. In curve b the incident light intensity has been reduced to one-half that of curve a. The stopping potential V_0 is independent of light intensity, but the saturation currents I_α and I_b are directly proportional to it.

מהגרף ניתן לראות שכמות האלקטרונים (שקובעים את הזרם) תלויה בעוצמת האור. ואולם עוצמת האור לא משפיעה על ערך המתח הבולם המפסיק לחלוטין את הזרם.

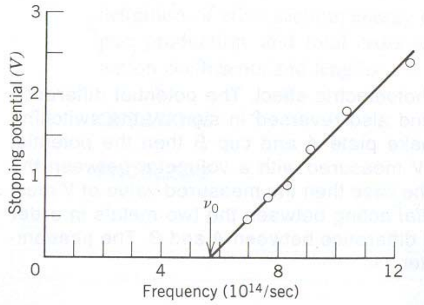


Figure 2-3 The stopping potential at various frequencies for sodium. The points show Millikan's data, except that the correction mentioned in the caption to Figure 2-1 has been recalculated using a recent measurement of the contact potential. The cutoff frequency ν_0 is 5.6×10^{14} Hz.

גרף זה מראה כי ערכו של המתח הבולם שמסוגל להפסיק לחלוטין את הזרם תלוי ביחס ישר בתדירות האור.

ג. (5) הראה כיצד ניתן לחשב מאחד הגרפים את קבוע פלנק.

The formula for the photoelectric effect is eV=hf – W. The plot of the stopping potential as a function of the frequency is linear and its slope is h/e. Thus we can calculate the slope and from it deduce the Plank constant h.

ד. (5) אשלגן מואר בקרינה אולטרה סגולה באורך גל של 2500 אנגסטרם. פונקצית העבודה של אשלגן היא 2.21eV. מהי האנרגיה המכסימלית של אלקטרון שנפלט מהמתכת ? האם ניתן להתעלם כאן מאפקטים יחסותיים? הסבר.

E=hf – W = h c / lambda – W = 6.6e-34 * 3e^8 / 2500e-10 – 2.21*1.6e-19 =

= 4.42e-19 J = 2.76 eV

We can neglect here the relativistic effects, because the kinetic energy is very small relative to the rest mass of the electron which is 0.511MeV.

Let's check this:

E=1/2 m v^2

V=sqrt(2E/m)=sqrt(2*4.42e-19/9.1e-31)=985611 m/s

Then (v/c)^2 = 10^-5 and gamma is very close to 1.

5. יחסות

א. (20) אורך סרגל במערכת S (מערכת המנוחה שלו) הוא L_0. הוכח שאורך הסרגל הזה במערכת S' (שנעה שביחס ל-S במהירות V) הוא L_0/γ.

ב. (5) כיצד משפיעה עובדה זו על יכולתו של מוט באורך 10 מטר להיות מוכל בתוך בית של 5 מטר? האם יוכל המוט להיות מוכל בבית לאורך זמן? הסבר.

Imagine a ruler of length L_0 (rest length). Imagine that it has a mirror at its far edge and that we shoot a photon from its near edge.

$L_0=ct_0'$ and $L_0=c(t_0-t_0')$ where t_0' is the time the photon hit the far edge of the ruler and t_0 when it hits the original edge it started from.

Now, the same measurement but from a space ship moving at V relative to the ruler:
$L+Vt'=ct'$ and $L-V(t-t')=c(t-t')$ => $2L=(c^2-V^2)t/c$

Together with $(\Delta t)^2 = (\Delta t_0)^2 \gamma^2$ and $2L_0=ct_0$ we get: $L=L_0/\gamma$
(again a consequence of the fact that c is the same in all frames).

ב. כאשר $\gamma=2$, המוט מתקצר בחצי וכך יכול מוט של 10 מטר להיכנס לבנין של 5 מטר. אבל, "קסם" זה הוא רגעי בלבד בגלל שהמוט בתנועה והוא מיד יצא מהבניין. כל ניסיון להאריך את שהייתו בבנין ע"י הקטנת מהירותו נדון לכישלון שכן אורכו של המוט מיד יגדל.

6. קוונטים

נתונות 3 פונקציות הגל הראשונות (של בור פוטנציאל הרמוני):

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad \psi_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi^3\hbar}\right)^{3/4} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-2 + \frac{4m\omega x^2}{\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

א. (2) צייר בור פוטנציאל הרמוני ואת מיקום רמות האנרגיה בו. צייר את פונקציות הגל של שלוש הרמות הראשונות.

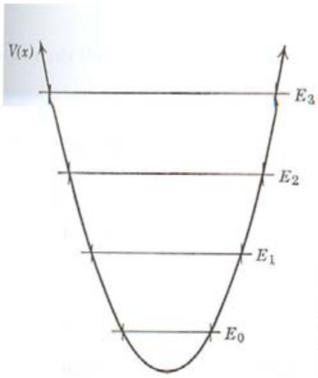


Figure 6-35 The first few eigenvalues of the simple harmonic oscillator potential. Note that the classically allowed regions (between the intersections of $V(x)$ and E_n) expand with increasing values of E_n.

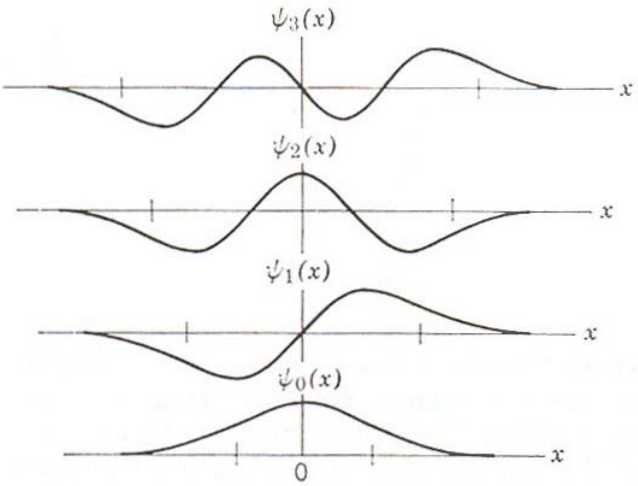


Figure 6-36 The first few eigenfunctions of the simple harmonic oscillator potential. The vertical ticks on the x axes indicate the limits of classical motion shown in Figure 6-35.

ב. (5) ביחס לרמת היסוד, בדוק שהפונקציה מנורמלת, חשב את רוחב פונקצית הגל (אי הודאות במקום) והסק מכך מה האנרגיה המינימלית שיכולה להיות לרמת היסוד.

In order to check the normalization, one has to verify int (Ψ_0^2 dx) = 1 (where int=integral from –infinity to +infinity)

Δx is just the square root (sqrt) of $<x^2>$ = int (x^2 Ψ_0^2 dx) since $<x>=0$.

Δx = sqrt(hbar /(2 m ω)) ➔ Δp=sqrt(2mω*hbar) so that $\Delta p \Delta x$=hbar

The minimal energy is E=$(\Delta p)^2$ / (2m) i.e. the minimal kinetic energy.

This gives E=hbar*ω which is a good estimate for the real solution of

E_min = 1/2 hbar*ω

ב. (5) הסבר בעזרת נוסחאות מדוע פוטון לא יכול לגרום לאלקטרון שנימצא בבור לקפוץ מרמת היסוד (n=1) לרמה השלישית (n=3). אופרטור האינטראקציה הוא האופרטור הדיפולי שתלוי ב-X.

על פי חוקי תורת הקוונטים שלמדנו, עוצמת האינטראקציה היא

int (Ψ_0 X Ψ_2 dx).

Since \psi_0 and \psi_2 are even, the integrand is odd, and then the integral is zero.

ד. (3) כתוב את פונקצית הגל שבה יש לאלקטרון סיכוי של 40% להיות ברמה הראשונה ו-60% להיות ברמה השלישית.

Ψ= sqrt(0.4) Ψ_0 + sqrt(0.6) Ψ_2

ה. (5) הסבר בעזרת נוסחאות מדוע ככל שמסתכלים על רמה יותר גבוהה בבור, מרחק החדירה שלה לאזור האסור מבחינה אנרגטית, קטן יותר. נסה לתת שני הסברים שונים.

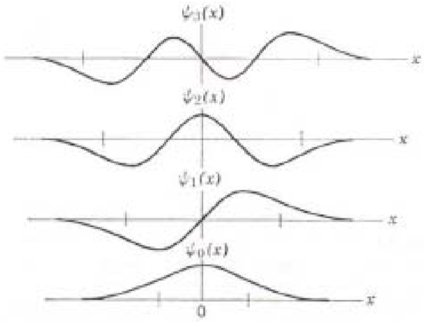


Figure 6-36 The first few eigenfunctions of the simple harmonic oscillator potential. The vertical ticks on the x axes indicate the limits of classical motion shown in Figure 6-35.

The potential walls are marked by the vertical ticks. These are the limits of the classical motion of the particle inside the well. The penetration of the wave function into the classically forbidden areas beyond the ticks is called tunneling (מינהור). Just as we learned in class in the case of tunneling through a finite potential barrier, the wave function which in principle looks like exp[-ikx] where k=sqrt[2m(E-V)]/ħ. However, inside the forbidden region k becomes imaginary as E<V. We can thus define a real k', by writing k'=sqrt[2m(V-E)]/ħ, and the wave function then becomes exp[-k'x], where k' is the decay constant. We note that the higher the energy level of the wave function, the smaller the penetration length (i.e. the larger k'). This simply comes from the fact that the harmonic potential is $1/2\ m\omega^2x^2$ and the gradient is thus $m\omega^2x$. This means that at larger x (V-E) is larger and hence k' is larger.
Another valid explanation has been given in the solution to Moed aleph of this year:
הזמן שמותר לו לשהות באיזור האסור מוגדר ע"י עקרון אי הודאות כלומר ע"י $\Delta E\Delta t>1/2\hbar$. מכיוון שהניגזרת של הפוטנציאל ההרמוני $1/2m\omega^2x^2$ היא $m\omega^2x$, ככל ש- E_n גבוה יותר ΔE הנידרש בכדי לא לשבור את חוק שימור האנרגיה הוא גדול יותר, ולכן Δt מתקצר והמרחק שהחלקיק יכול לעבור באיזור האסור קטן יותר (כמו במקרה של מינהור דרך מחסום ריבועי כאשר גובה המחסום גדול בהרבה מהאנרגיה הקינטית של החלקיק הפוגע במחסום).

ו. (5) מה הנוסחא להפרשי האנרגיה בין הרמות? מה מיוחד בה ביחס לבור פוטנציאל אינסופי.

E_n = hbar ω (n + 1/2)

Even for n=0   E_0=1/2 hbar ω, is non-zero which means that a particle cannot have zero energy.

The thing that is unique to an harmonic potential (relative to square potentials) is that The difference E_{n+1}-E_n = hbar ω is constant, whereas in square wells it changes as a function of n.

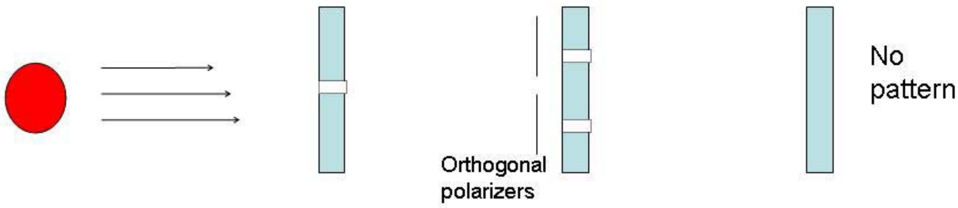
שאלת בונוס:

(10) תאר ניסוי המבוסס על שני הסדקים כיצד ניתן לעבור בצורה <u>הדרגתית</u> מפוטון שהוא גל לפוטון שהוא חלקיק. השתמש בדרגת החופש של הקיטוב.

תשובה: לפניכם שקף משיעור מספר אחד. כאשר לפוטון שעובר בחריר אחד אנו נותנים תכונה שונה מלפוטון שעובר בחריר השני (במקרה הזה ע"י מקטבים שמשנים את הקיטוב), הרי ניתן לדעת באיזה חריר עבר פוטון מסוים שפוגע עכשיו במסך, ודבר זה מכתיב אופי חלקיקי ומחסל את תבנית ההתאבכות על המסך – שהיא תופעה גלית. ניתן למחוק מידע זה בהדרגתיות ע"י הכנסת מערבב קיטובים בין החרירים והמסך.

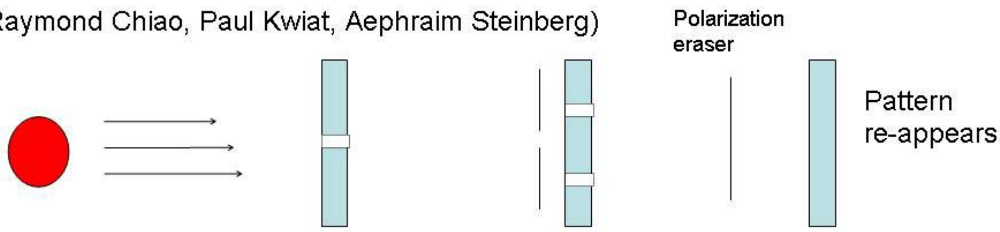
Actually, its gets even much stranger…
(is complementarity more fundamental than the uncertainty principle…?)

You don't have to measure them (or kick them)… its enough that you make such "which path knowledge" available in principle i.e. tag the photons (e.g. polarizers) (or their environment e.g. emit a photon in a cavity / scully).



But then you can also erase the tagging!

(Raymond Chiao, Paul Kwiat, Aephraim Steinberg)



How does the photon know at the slit know that in its future there is going to be an eraser?