

לרשותך 3 שעות שבהן עליך לפתור 4 שאלות שכל אחת שווה 25 נקודות. עליך לבחור 3 שאלות מתוך הארבע שמופיעות שחלק א' ושאלה אחת מתוך השתיים שמופיעות בחלק ב'. השאלות בחלק ב' קשות יותר לפתרון. הניקוד עבור כל סעיף מופיע בסוגריים. לבסוף ישנה שאלת בונוס ששוויה 10 נקודות (+הערכתי הרבה). אין להשתמש בכל חומר עזר מלבד דף הנוסחאות שמחולק על ידי הבוחנות. אין להשתמש במחשבון (לא נידרש להגיע לדיוקים גבוהים בתוצאות). בהצלחה.

חלק א' (ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות)

1. קוונטים

נתונות 3 פונקציות הגל הראשונות (של בור פוטנציאל הרמוני):

$$\psi_1(x) = \sqrt{2} \left(\frac{m\omega}{\pi^3 \hbar} \right)^{3/4} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-2 + \frac{4m\omega x^2}{\hbar} \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

א. (10) חשבי/ את אי הודאות במיקום החלקיק הנמצא ברמת היסוד.

חשבי/ לגבי אותו חלקיק את אי הודאות בתנע. ודאי/ שעקרון אי הודאות מתקיים.

The first level (ground state) is ψ_0 . The uncertainty in x is $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ as the ground state function is an even (symmetric or parity plus) function. The final step is to calculate $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 x^2 \psi_0$, where all integrals are over x from $-\infty$ to $+\infty$.

The uncertainty in p is $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$ as the ground state function is an even (symmetric) function also in p (the fourier transform of a symmetric function is also a symmetric function, or in intuitive terms, the particle spends the same amount of time going right and going left inside its potential well). The final step is to calculate $\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 p^2 \psi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0 (-i\hbar)^2 \partial^2 / \partial x^2 \psi_0$.

To check the uncertainty principle one takes the results we obtained and calculates $\Delta x \Delta p$.

ב. (10) צייר את שלושת פונקציות הגל וגם את הפוטנציאל שבו הן נמצאות תוך מתן דגש על האזורים שבהם חודרות הפונקציות לתוך הפוטנציאל. תן שם לחדירה זו והסבר מהו ההבדל בעוצמת התופעה בין שלוש הפונקציות. כתוב ביטוי מתמטי איכותי להתנהגות הפונקציה באזור זה.

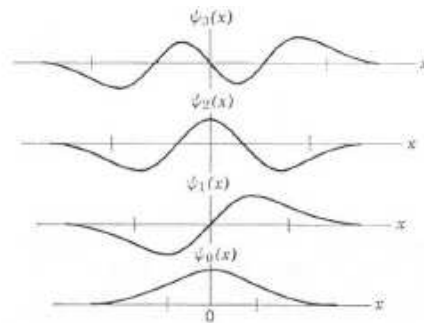


Figure 6-36 The first few eigenfunctions of the simple harmonic oscillator potential. The vertical ticks on the x axes indicate the limits of classical motion shown in Figure 6-35.

The potential walls are marked by the vertical ticks. These are the limits of the classical motion of the particle inside the well. The penetration of the wave function into the classically forbidden areas beyond the ticks is called tunneling (מינהור). Just as we learned in class in the case of tunneling through a finite potential barrier, the wave function which in principle looks like $\exp[-ikx]$ where $k=\sqrt{2m(E-V)}/\hbar$. However, inside the forbidden region k becomes imaginary as $E < V$. We can thus define a real k' , by writing $k'=\sqrt{2m(V-E)}/\hbar$, and the wave function then becomes $\exp[-k'x]$, where k' is the decay constant. We note that the higher the energy level of the wave function, the smaller the penetration length (i.e. the larger k'). This simply comes from the fact that the harmonic potential is $1/2 m\omega^2 x^2$ and the gradient is thus $m\omega^2 x$. This means that at larger x ($V-E$) is larger and hence k' is larger.

Another valid explanation has been given in the solution to Moed aleph of this year:

הזמן שמותר לו לשהות באזור האסור מוגדר ע"י עקרון אי הודאות כלומר ע"י $\Delta E \Delta t > 1/2\hbar$. מכיוון שהניגזרת של הפוטנציאל ההרמוני $1/2m\omega^2 x^2$ היא $m\omega^2 x$, ככל ש- E_n גבוה יותר ΔE הנידרש בכדי לא לשבור את חוק שימור האנרגיה הוא גדול יותר, ולכן Δt מתקצר והמרחק שהחלקיק יכול לעבור באזור האסור קטן יותר (כמו במקרה של מינהור דרך מחסום ריבועי כאשר גובה המחסום גדול בהרבה מהאנרגיה הקינטית של החלקיק הפוגע במחסום).

ג. (5) באיזה אזורים של הבור הסיכויים הגדולים ביותר למצוא את החלקיק במצב היסוד ובשני המצבים הבאים אחריו (צייר/י)? הסבר/י, מצא/י את נקודת המקסימום וכתוב את הביטוי עבור ההסתברות לגילוי עבור גלאי שרוחב המדידה שלו הוא אפסילון (אל תפתור/י).

The probability to find a particle somewhere is determined by $P(x)=\psi^*\psi=|\psi|^2$. The probability will therefore be highest in the places where the wave function absolute value has maximums. These regions are presented with grey shading in the following figure.

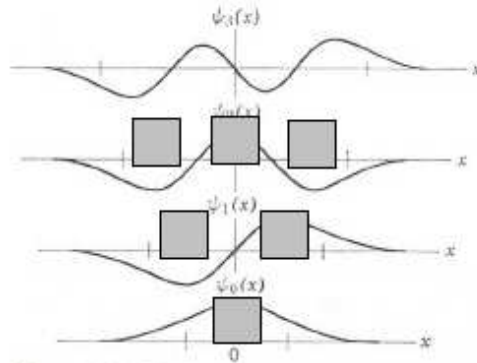
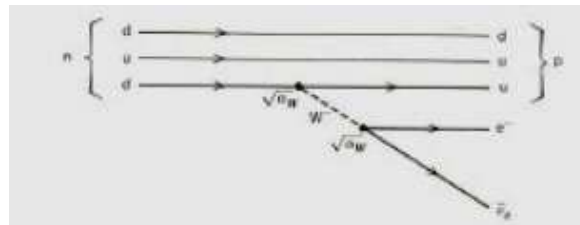


Figure 6-36 The first few eigenfunctions of the simple harmonic oscillator potential. The vertical ticks on the x axes indicate the limits of classical motion shown in Figure 6-35.

The chance to find a particle in a window of width Epsilon (ϵ) centered around x_0 , is $\text{INT}[P(x)]$ where the integral limits are $x_0-\epsilon/2$ to $x_0+\epsilon/2$.

2. חלקיקים

- א. (5) הסבר מהי קרינת ביתא, ומהם כל החלקיקים הלוקחים חלק בקרינה זו כתוצאה מאי יציבות של הגרעין, משתנה מסתו, אך מספר המסה של הגרעין נשאר קבוע ניטרון הופך לפרוטון, נפלטים פוזיטרון / אלקטרונים וניטרינו / אנטיניטרינו.
- ב. (5) הסבר מדוע לדעתך מתרחשת קרינה זו. השתמש בעמק היציבות. האם סוג החומר משתנה בעקבות קרינה זו? פרט.
- תהליך של קרינה מוריד את מסת הגרעין ולכן מגדילים את יציבותו. התפרקות זו יכולה להתרחש רק כאשר מסת גרעין האב גבוהה מסכום המסות של גרעין הבת ושל אלקטרון. קרינה זו משנה סוג של חומר ג. (5) צייר את דיאגרמת פיינמן של היווצרות קרינה זו.



- ד. (5) תאר איזה כוחות וחוקי שימור פועלים כאן.
- כוחות : חזק – משנה צבע, וחלש – נפלט W שמתפרק לאלקטרון וניטרינו
- חוקי שימור : אנרגיה, תנע, תנע זוויתי, מספר בריוני ומספר לפטוני

ה. (5) חשב את האנרגיה הקינטית המשתחררת.

$$E = (m_{Z,A} - m_{Z+1,A} - m_e)c^2$$

3. יחסות

שני מחסומי כביש במפגש מסילה-כביש יכולים לרדת ולעלות חזרה בזמן קצר ביותר (הניחו שהזמן הוא אפס). המרחק בין שני המחסומים 10 מטר. משאית שאורכה 20 מטר מנסה להצות את המסילה (קרי לעבור את שני המחסומים). מפעיל המחסומים שיושב לצידם מוריד ומעלה אותם בו זמנית. לשם תרגול (אין רכבת באופק) מפעיל המחסומים מוריד ומעלה את המחסומים בלא כל השהייה בין שתי הפעולות הללו. לפתע הוא שם לב שבזמן שהמחסומים היו למטה, הייתה המשאית כולה בין שני המחסומים.

א. (5) באיזה מהירות צריכה המשאית לנסוע בכדי שהדבר יהיה אפשרי?

אורך צריך להתקצר פי 2:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{2} \Rightarrow \gamma = 2$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0.25 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0.88c$$

ב. (15) צייר בדייקנות (כולל מספרים) את קוי העולם (world lines) של ההתרחשות מנקודת מבטו של מפעיל המחסומים וגם של נהג המשאית. לצורך כך חשב את זווית המדויקת של קוי העולם.

ג. (5) כיצד מסביר לעצמו נהג המשאית את ההתרחשות?

במערכת של מפעיל, שני מחסומים עולים וירדים יחד, אך במערכת של נהג, כל אחד מהם עולים וירדים לא מתוזמן.

4. קוונטים

ניסוי שטרן-גרלך

א. (5) צייר את הניסוי ותאר באיזה חלקיק השתמשו, הסבר במדויק למה ציפו ומה גילו.

They used an atom which has no internal angular momentum, the only magnetic interaction can be due to the intrinsic angular momentum of the electron, the so-called spin. The magnetic interaction with an external field is they described by the potential $V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$, where $\mu = g \mu_B S_Z$ where S_Z is the spin projection along the z axis, and μ_B is the Bohr magneton.

ב. (5) הסבר בעזרת נוסחאות מדוע נזקקו לשדה מגנטי לא הומוגני.

As the force F acting on a particle is equal to $F = \partial V / \partial r = - \boldsymbol{\mu} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial r = g \mu_B S_Z \partial B_Z / \partial z$, all SG needed to do is produce a magnetic field gradient in order to apply force on the passing atoms. The force was then proportional to S_Z and as the latter is quantized to $\pm 1/2$, the force was quantized and the atoms hit two points on the screen.

ג. (10) חשב מה המרחק בין הפגיעות על המסך אם נתון שהשדה הוא $B(z) = Az$ ואם נתון שמהירות

החלקיק 10 cm/s , שאורך המגנט 10 cm ושהמרחק בין סוף המגנט לבין המסך 1 m .

According to the previous section, $F = g \mu_B S_Z A$ and therefore the transverse velocity which the passing particle acquires is $\pm F/m t$ and the distance between the two hitting points is $2 F/m t T$, where t is the time it takes the particle to pass the magnetic field and T is the time it takes it to arrive at the screen. The final distance between the points is $2 F/m L/V$ $10L/V$ (if one neglects the transverse distance inside the SG machine) and $2 * F/m L/V$ $10L/V + 2 * 1/2 F/m (L/V)^2$ (without neglecting the latter).

ד. (5) מה היה קורה לו היו לוקחים אטום עם $L=1$? הראה בערת נוסחאות.

As the magnetic moment contribution of the electron depends on its total angular momentum J , and as $J_Z = L_Z + S_Z$, and as, when calculating the hits on the SG screen (i.e. the transverse forces) one has to take into account that g for the orbital motion is $g_L = 1$ while for the spin is $g_S = 2$, we will have the following forces acting on the atoms:

$$F(L_Z = +1, S_Z = +1/2), F(L_Z = +0, S_Z = +1/2), F(L_Z = -1, S_Z = +1/2),$$

$$F(L_Z = +1, S_Z = -1/2), F(L_Z = +0, S_Z = -1/2), F(L_Z = -1, S_Z = -1/2),$$

$$\text{We then find } F(L_Z = +1, S_Z = +1/2) = A \mu_B (L_Z * g_L + S_Z * g_S) =$$

$$A \mu_B (L_Z + 2S_Z) = 2A \mu_B, \text{ and in the same way:}$$

$$F(L_Z = 0, S_Z = +1/2) = A \mu_B, F(L_Z = -1, S_Z = +1/2) = 0, F(L_Z = +1, S_Z = -1/2) = 0,$$

$$F(L_Z = 0, S_Z = -1/2) = -A \mu_B, \text{ and } F(L_Z = -1, S_Z = -1/2) = -2A \mu_B.$$

We therefore expect to see 5 separate hits on the screen.

חלק ב': (ענה על אחת מתוך שתי השאלות הבאות)

5. יחסות

א. (20) הזמן בין שני מאורעות במערכת המנוחה S הוא Δt . הוכח שהזמן בין שני מאורעות אלו במערכת S' (שנעה שביחס ל-S במהירות V) הוא $\Delta t \gamma$.

We focus on a light beam traveling vertically on a train. Let there be a light source on the floor of the train and a mirror on the ceiling, which is a height h above the floor. Let observer A be on the train, and observer B be on the ground. The speed of the train with respect to the ground is v . A flash of light is emitted. The light travels up to the mirror and then back down to the source.

In A's frame, the train is at rest. The path of the light is shown in Figure 1. It takes the light a time h/c to reach the ceiling and then a time h/c to return to the source. The roundtrip time is therefore:

$$\Delta t = \frac{2h}{c}$$

In B's frame, the train moves at speed v . The path of the light is shown in Fig. 2. The crucial fact to remember is that the speed of light in B's frame is still c . This means that the light travels along its diagonally upward path at speed c . Since the horizontal component of the light's velocity is v , the vertical component must be $\sqrt{c^2 - v^2}$ as

shown in Fig.3. The time it takes to reach the mirror is therefore $\frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ so the roundtrip time is:

$$\Delta t' = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \Delta t \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \Delta t \cdot \gamma$$

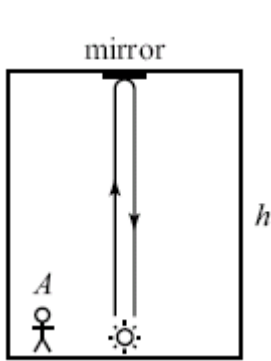


Fig 1.

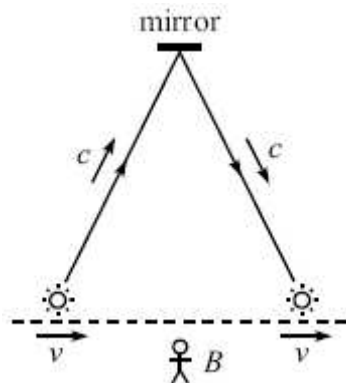


Fig 2.

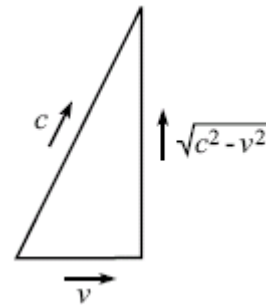


Fig 3.

ב. (5) כיצד משפיעה עובדה זו על חלקיקים אלמנטריים שמגיעים אלינו מהחלל? הסבר את העובדה שהחלקיקים מגיעים לכדור הארץ מנקודת מבט החלקיקים ומנקודת מבטו של הצופה העומד על כדור הארץ.

6. קוונטים

$$V = \begin{cases} 0, & -a/2 < x < a/2 \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{חלקיק קוונטי נתון להשפעת פוטנציאל חיצוני מהצורה}$$

א. (5) רשמו את משוואת שרדינגר עבור חלקיק זה וכתבו את תנאי השפה המתאימים. פתרו את המשוואה ומצאו את האנרגיות העצמיות ואת המצבים העצמיים (המנורמלים!). ציירו סכימתית את שלושת המצבים העצמיים הראשונים.

Solution of time-independent schrodinger eq.: $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$ is:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin(kx) + B \cos(kx) & \text{for } -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

in order to obtain boundary conditions : $\Psi(-a/2) = \Psi(a/2) = 0$

we get:
$$\sin\left(k \frac{a}{2}\right) = 0 \quad \text{or} \quad \cos\left(k \frac{a}{2}\right) = 0$$

from this we obtain to different k 's, which leads to different energies and different wave functions:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\pi(2n)}{a} & ; & & k &= \frac{\pi(2n+1)}{a} \\ E_n &= \frac{\hbar^2 \pi^2 (2n)^2}{2ma^2} & ; & & E_n &= \frac{\hbar^2 \pi^2 (2n+1)^2}{2ma^2} \\ \Psi(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n x) & ; & & \Psi(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(k_n x) = 0 \end{aligned}$$

ב. (2) נניח כעת שהפוטנציאל מוגדר כ- $V = \begin{cases} 0, & -a/4 < x < 3a/4 \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$. מה יהיו רמות האנרגיה?

ציירו סכימתית את שלושת המצבים העצמיים הראשונים במקרה הזה. אין צורך בחישובים מתמטיים.

The wave functions will be shifted.

$$k = \frac{\pi(4n)}{3a} \quad ; \quad k = \frac{4\pi(n+1/2)}{a}$$

הסעיפים הבאים מתייחסים לפתרון שמצאתם בסעיף הקודם עבור בור הראשון (שמרכזו ב $x=0$):

הכינו חלקיק בבור פוטנציאל כך שב - 40% מהמדידות מתקבלת האנרגיה E_5 ובשאר המדידות

מתקבלת האנרגיה E_2 .

ג. (3) רשמו את פונקציית הגל של החלקיק. ודאו שהפונקציה מנורמלת.

$$\Psi(x) = \sqrt{0.6}\psi_2 + \sqrt{0.4}\psi_5 = 0.77\psi_2 + 0.63\psi_5 = 0.77\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + 0.63\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right)$$

ד. (10) לפונקציית הגל שמצאתם בסעיף הקודם חשבו את ממוצע האנרגיה $\langle E \rangle$ והתנע הממוצע $\langle p \rangle$ של החלקיק הנ"ל. מצאו את אי הודאות במקום.

$$\langle E \rangle = 0.6E_2 + 0.4E_5 = 0.6 \frac{\hbar^2 \pi^2 (4)^2}{2ma^2} + 0.4 \frac{\hbar^2 \pi^2 (10)^2}{2ma^2} = 49.8 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-a/2}^{a/2} \left[C\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + D\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \right] \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[C\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + D\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \right] dx = \\ &= -i\hbar \int_{-a/2}^{a/2} \left[C\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + D\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \right] \left[C\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) - D\frac{5\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \right] dx = \\ &= -i\hbar \int_{-a/2}^{a/2} \left[C\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) * D\frac{5\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right) - C\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) * D\frac{5\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \right] dx = \\ &= -i\hbar CD \frac{10\pi}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{5\pi x}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \right] dx \end{aligned}$$

ה. (5) כתבו את פונקציית הגל שמצאתם בסעיף ג' כולל התלות בזמן.

$$\Psi(x,t) = 0.77\psi_2 \exp(-i\frac{E_2 t}{\hbar}) + 0.63\psi_5 \exp(-i\frac{E_5 t}{\hbar})$$

שאלת בonus:

(10) תאר בעזרת פעולת המיקרוסקופ כיצד אולי הגיע הייזנברג לעיקרון אי הודאות.
