מבחן פיסיקה 3 (203-1-2391)– מועד ב' (2005)

חומר עזר מותר לשימוש: דף הנוסחאות של המרצה בלבד! (יחולק בתחילת המבחן)

מרצה: רון פולמן

לרשותך 3 שעות שבהן עליך לפתור 4 שאלות שכל אחת שווה 25 נקודות. עליך לבחור 3 שאלות מתוך הארבע שמופיעות שחלק א' ושאלה אחת מתוך השתיים שמופיעות בחלק ב'. השאלות בחלק ב' קשות יותר לפתרון. לבסוף ישנה שאלת בונוס אחת ששויה 10 נק' ואחת ששויה 5 נק' (+הערכתי הרבה). לסיכום, עליך לענות על בדיוק 3 שאלות בחלק א', שאלה אחת בחלק ב', ושאלות בונוס ככל שתרצה. בהצלחה.

חלק א' (ענה/י על 3 מתוך 4 השאלות הבאות)

---

1. (25 נק') נתונות 3 פונקציות הגל הראשונות (של בור פוטנציאל הרמוני):

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},\quad \psi_1(x) = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi^3\hbar}\right)^{3/4} x e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-2+\frac{4m\omega x^2}{\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

א. (5 נק') חשב/י את אי הודאות במיקום החלקיק הנמצא ברמה היסוד. חשב/י לגבי אותו חלקיק את אי הודאות בתנע. ודא/י שעקרון אי הודאות מתקיים.

The first level (ground state) is ψ_0.

The uncertainty in x is Δx=sqrt($<x^2>-<x>^2$)=sqrt($<x^2>$) as the ground state function is an even (symmetric or parity plus) function. The final step is to calculate $<x^2>$=Integral[ψ_0 x^2 ψ_0], where all integrals are over x from –infinity to +infinity.

The uncertainty in p is Δp=sqrt($<p^2>-<p>^2$)=sqrt($<p^2>$) as the ground state function is an even (symmetric) function also in p (the fourier transform of a symmetric function is also a symmetric function, or in intuitive terms, the particle spends the same amount of time going right and going left inside its potential well). The final step is to calculate $<p^2>$=Integral[ψ_0 p^2 ψ_0]=Integral[ψ_0 $(-i\hbar)^2$ ∂^2/∂^2x ψ_0].

To check the uncertainty principle one takes the results we obtained and calculates $\Delta x\Delta p$.

ב. (5 נק') צייר את שלושת פונקציות הגל וגם את הפוטנציאל שבו הן נמצאות תוך מתן דגש על האזורים שבהם חודרות הפונקציות לתוך הפוטנציאל. תן שם לחדירה זו והסבר מהו ההבדל בעוצמת התופעה בין שלושת הפונקציות. כתוב ביטוי מתמטי איכותי להתנהגות הפונקציה באזור זה.

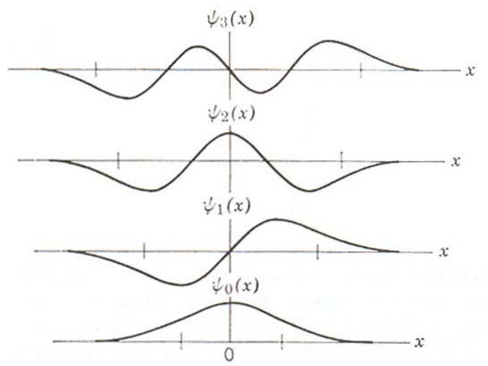


Figure 6-36 The first few eigenfunctions of the simple harmonic oscillator potential. The vertical ticks on the x axes indicate the limits of classical motion shown in Figure 6-35.

The potential walls are marked by the vertical ticks. These are the limits of the classical motion of the particle inside the well. The penetration of the wave function into the classically forbidden areas beyond the ticks is called tunneling (מינהור). Just as we learned in class in the case of tunneling through a finite potential barrier, the wave function which in principle looks like exp[-ikx] where k=sqrt[2m(E-V)]/ħ. However, inside the forbidden region k becomes imaginary as E<V. We can thus define a real k', by writing k'=sqrt[2m(V-E)]/ħ, and the wave function then becomes exp[-k'x], where k' is the decay constant. We note that the higher the energy level of the wave function, the smaller the penetration length (i.e. the larger k'). This simply comes from the fact that the harmonic potential is $1/2\ m\omega^2x^2$ and the gradient is thus $m\omega^2x$. This means that at larger x (V-E) is larger and hence k' is larger.

Another valid explanation has been given in the solution to Moed aleph of this year:

הזמן שמותר לו לשהות באיזור האסור מוגדר ע"י עקרון אי הודאות כלומר ע"י $\Delta E\Delta t>1/2\hbar$. מכיוון שהניגזרת של הפוטנציאל ההרמוני $1/2m\omega^2x^2$ היא $m\omega^2x$, ככל ש- E_n גבוה יותר ΔE הנידרש בכדי לא לשבור את חוק שימור האנרגיה הוא גדול יותר, ולכן Δt מתקצר והמרחק שהחלקיק יכול לעבור באיזור האסור קטן יותר (כמו במקרה של מינהור דרך מחסום ריבועי כאשר גובה המחסום גדול בהרבה מהאנרגיה הקינטית של החלקיק הפוגע במחסום).

ג. (5נק') באיזה אזורים של הבור הסיכויים הגדולים ביותר למצוא את החלקיק במצב היסוד ובשני המצבים הבאים אחריו (צייר/י)? הסבר/י, מצא/י את נקודת המקסימום וכתוב את הביטוי עבור ההסתברות לגילוי עבור גלאי שרוחב המדידה שלו הוא אפסילון (אל תפתור/י).

The probability to find a particle somewhere is determined by $P(x)=\psi^*\psi=|\psi|^2$. The probability will therefore be highest in the places where the wave function absolute value has maximums. These regions are presented with grey shading in the following figure.

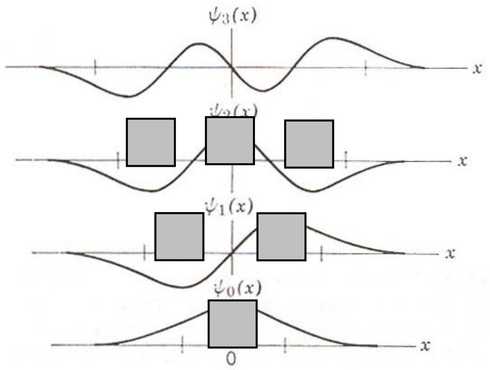


Figure 6-36 The first few eigenfunctions of the simple harmonic oscillator potential. The vertical ticks on the *x* axes indicate the limits of classical motion shown in Figure 6-35.

The chance to find a particle in a window of width Epsilon (ε) centered around x_0, is INT[P(x)] where the integral limits are $x_0-\varepsilon/2$ to $x_0+\varepsilon/2$.

ד. (10 נק') נתונה פונקצית הגל של אטום המימן:

$$\psi_{n,l,m,ms} = \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_{2,1,-1,1/2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_{2,1,1,1/2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\psi_{2,1,1,-1/2}$$

הראה/י כי פונקצית גל זו מנורמלת. מצא/י את הממוצעים של רכיב z של הספין, ורכיב z של התנע הזוויתי. מהי אי-הוודאות בכיוון z של התנע הזוויתי?

$$\int |\psi^2| dV = \psi \cdot \psi = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

Since

$$S_z\psi = \frac{hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\psi_{2,1,-1,1/2} + \frac{hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\psi_{2,1,1,1/2} + \frac{hbar}{2}\frac{sqrt3}{\sqrt{5}}\psi_{2,1,1,-1/2}$$

Then

$$\begin{aligned}\langle S_z\rangle &= \int \psi S_z \psi dV \\ &= \psi \cdot S_z\psi \\ &= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{5} + \frac{\hbar}{2}\frac{1}{5} - \frac{\hbar}{2}\frac{3}{5} \\ &= -\frac{1}{10}\hbar.\end{aligned}$$

In the same way we get:

$$\langle L_z\rangle = -\hbar\frac{1}{5} + \hbar\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\hbar$$

We know that

$$\Delta L_z = \sqrt{\langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle}$$

In the same way we solved the previous problems we have

$$\langle L_z^2\rangle = \hbar^2\frac{1}{5} + \hbar^2\frac{1}{5} + \hbar^2\frac{3}{5} = \hbar^2.$$

Therefore:

$$\Delta L_z^2 = \hbar^2 - \frac{9}{25}\hbar^2,$$

so that

$$\Delta L_z = \frac{4}{5}\hbar.$$

2. (25 נק') Stern&Gerlach הצליחו למדוד בפעם הראשונה את הספין של האלקטרון.

א.(2 נק') הסבר/י בעזרת ציור ונוסחאות כיצד עשו זאת. באיזה חלקיק השתמשו ומדוע?

As they used an atom which has no internal angular momentum, the only magnetic interaction can be due to the intrinsic angular momentum of the electron, the so-called spin. The magnetic interaction with an external field is they described by the potential $V = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$, where $\mu = g\,\mu_B\,S_Z$ where S_Z is the spin projection along the z axis, and μ_B is the Bohr magneton. As the force F acting on a particle is equal to $F = \partial V/\partial r = -\boldsymbol{\mu}\cdot\partial\mathbf{B}/\partial r = g\,\mu_B\,S_Z\,\partial B_Z/\partial z$, all SG needed to do is produce a magnetic field gradient in order to apply force on the passing atoms. The force was then proportional to S_Z and as the latter is quantized to +/- 1/2, the force was quantized and the atoms hit two points on the screen.

ב. (5 נק') מה המרחק בין שתי הפגיעות על המסך אם $B(z)=Az$ ואם אורך המכשיר L מטר ומהירות החלקיק V מטר לשניה (המסך מרוחק מהמכשיר L כפול 10).

According to the previous section, $F = g\,\mu_B\,S_Z\,A$ and therefore the transverse velocity which the passing particle acquires is +/- F/m t and the distance between the two hitting points is 2 F/m t T, where t is the time it takes the particle to pass the magnetic field and T is the time it takes it to arrive at the screen. The final distance between the points is 2 F/m L/V 10L/V (if one neglects the transverse distance inside the SG machine) and 2* F/m L/V 10L/V + 2* 1/2 F/m $(L/V)^2$ (without neglecting the latter).

ג. (3 נק') מה הפרש האנרגיה בין שתי רמות האנרגיה של אלקטרון זה בשדה הומוגני?

As $V = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$, The energy difference is $B*(g\,\mu_B\,S_Z(1) - g\,\mu_B\,S_Z(2)) =$

$Bg\,\mu_B *[(+1/2) - (-1/2)] = Bg\,\mu_B$.

ד. (5 נק') מה היה קורה בניסוי SG הנ"ל לו הספין של האלקטרון לא היה חצי כי אם 1? חשב.

We would have three hits on the screen according to S_Z=+1, 0, -1, which are the allowed projections for a spin 1.

ה. (10 נק') מה היה קורה לו SG היו לוקחים אטום שרמת היסוד שלו L=2?

As the magnetic moment contribution of the electron depends on its total angular momentum J, and as $J_Z=L_Z+S_Z$, and as, when calculating the distances and therefore the forces one has to take into account that g for the orbital motion is $g_L=1$ while for the spin is $g_S=2$, we will have the following forces acting on the atoms:

$F(L_Z=+1, S_Z=+1/2)$, $F(L_Z=+0, S_Z=+1/2)$, $F(L_Z=-1, S_Z=+1/2)$,

$F(L_Z=+1, S_Z=-1/2)$, $F(L_Z=+0, S_Z=-1/2)$, $F(L_Z=-1, S_Z=-1/2)$,

We then find $F(L_Z=+1, S_Z=+1/2)=A\ \mu_B\ (L_Z*g_L+ S_Z*g_S)=$

$A\ \mu_B\ (L_Z+ 2S_Z)=2A\mu_B$, and in the same way:

$F(L_Z=0, S_Z=+1/2)= A\mu_B$, $F(L_Z=-1, S_Z=+1/2)=0$, $F(L_Z=+1, S_Z=-1/2)=0$,

$F(L_Z=0, S_Z=-1/2)= -A\mu_B$, and $F(L_Z=-1, S_Z=-1/2)= -2A\mu_B$.

We therefore expect to see 5 separate hits on the screen.

3. יחסות.

א. (15 נק') רכבת שאורכה 100 מטר נעה במהירות 0.866c. ברגע t=0 (במערכת של הנוסע היושב ברכבת) הקצה הקדמי של הרכבת ניכנס למנהרה שאורך המנוחה שלה הוא (כלומר מבחינתו של צופה שעומד נייח לצד המנהרה) 50 מטר. חשב בעזרת דיאגרמת זמן-מרחב את הזמן (במערכת הנוסע) שבו יוצא החלק האחורי של הרכבת מהמנהרה.

This problem is the exact analog of the barn paradox presented in class. Hence the space-time diagram is identical.

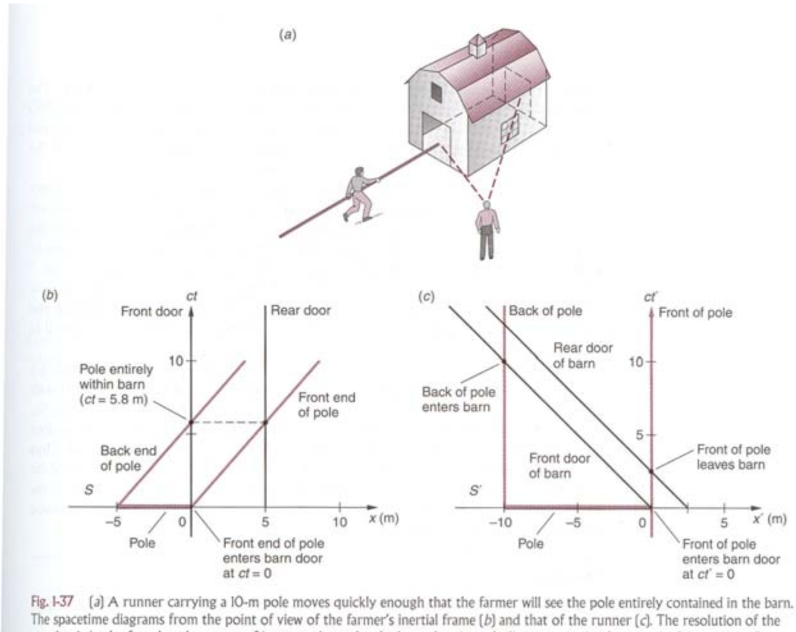


Fig. 1-37 (a) A runner carrying a 10-m pole moves quickly enough that the farmer will see the pole entirely contained in the barn. The spacetime diagrams from the point of view of the farmer's inertial frame (b) and that of the runner (c). The resolution of the paradox is in the fact that the events of interest, shown by the large dots in each diagram, are simultaneous in S, but not in S'.

In the barn paradox it is stated that the pole has a rest length of 10m while it is viewed by the farmer as having 5 meter length. This immediately leads to β=0.866 which is the same velocity as the train in this problem. In this problem the only difference is that the lengths have been made longer by a factor of 10. To accurately calculate times from the diagram, one must use the angle θ of the world line which may be computed from: $\theta=\tan^{-1}(1/\beta)$.

ב. (10 נק') מיקרו מטאוריט 10^{-9} ק"ג עובר ע"פ כדור הארץ במהירות הלא יחסותית של אחוז אחד.
באותו זמן עוברת על ידו באותו כיוון חללית במהירות חצי מהירות האור (יחסית לכדור הארץ).
מהם האנרגיה והתנע של המטאורית בעיני צופה מהקרקע וצופה מהחללית?

Lets think: S=earth, S'=spaceship. V=0.5C is the relative speed between the frames.
U=0.01C is the speed of the meteorite in frame S.
$E \sim 1/2\ m_0 U^2 + m_0C^2 = 10^{-9}\ [(0.01C)^2/2 + C^2] = 1.00005\ 10^{-9}$ J
$p_x = mU_x = 10^{-9}\ 0.01C = 10^{-11}C$ kg m/s.
For this situation we have γ=1.1547
$E' = \gamma(E - Vp_x) = 1.1547\ [1.00005\ 10^{-9}C^2 - 0.5C\ 10^{-11}C] = 1.14898\ 10^{-9}\ C^2$ J
$p'_x = \gamma(p_x - VE/C^2) = 1.1547\ [10^{-11}C - (0.5C\ 1.00005\ 10^{-9}\ C^2)/C^2] = -0.566\ 10^{-11}C$ kg m/s.

4. (25 נק') חלקיקים.
א. (12 נק') קבע/י אילו מבין האטרקציות הבאות אפשריות או לא אפשריות ולמה (הסבר איזה כח כנראה היה מעורב בתהליך):

I) $n \to p + e^- + \upsilon_e$

II) $\pi^- + p \to \pi^0 + n$

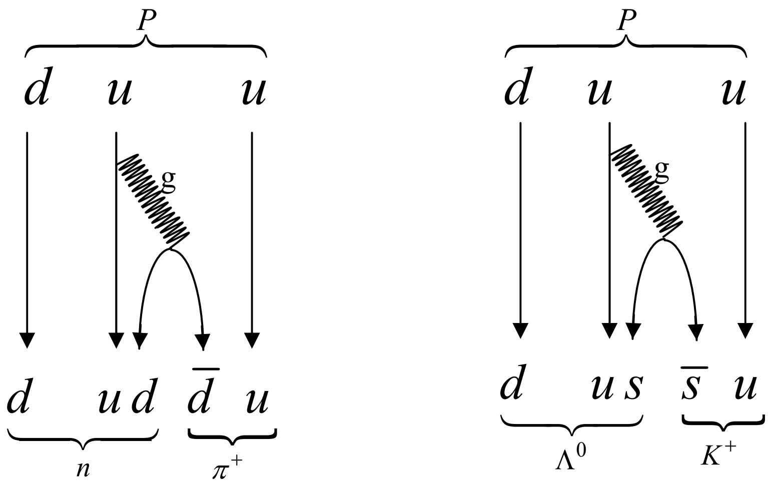
III) $p + p \to \pi^+ + n + \Lambda^0 + K^+$

IV) $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$

I) This is not possible as the leptonic number is not conserved.
II) This is possible for the strong force as all the conservation laws are maintained. The electro-magnetic force cannot act because some of the particles don't have charge.
III) This is possible through the strong force as all conservation laws (including strangeness) are conserved.
IV) This is a decay process which maintains all the conservation laws (including

strangeness). However, it cannot be due to the strong force as the strong force cannot interact with a gamma (photon particle).

Here is an example of one of the processes:



ב. (5 נק') מצא/י את האנרגיה הקינטית של כל אחד מהתוצרים בתהליך הבא: $\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$

כאשר נתון כי המגיבים היו בתחילת התהליך במנוחה.

Because the particles started at rest we find that the total energy in the system is:

$m_{0\pi^-}c^2 + m_{0p}c^2 = 1077.9MeV$ which equal to the energy at the end:

$$\sqrt{\underbrace{m_{0\pi^0}^2 c^4}_{E_{0\pi^0}^2} + P_{\pi^0}^2 c^2} + \sqrt{\underbrace{m_{0n}^2 c^4}_{E_{0n}^2} + P_n^2 c^2} = E_{\pi^0} + E_n$$

As there is momentum conservation i.e. $0 = \vec{P}_n + \vec{P}_{\pi^0} \Rightarrow P_n = -P_{\pi^0}$ the above equation allows us to conclude that:

$$E_n^2 - E_{\pi^0}^2 = \left(E_n + E_{\pi^0}\right)\left(E_n - E_{\pi^0}\right) = E_{0n}^2 - E_{0\pi^0}^2 = 8.646 \times 10^5 (MeV) \quad (*)$$

From conservation of energy we also know that:

$$E_{\pi^0} + E_n = E_{\pi^-} + E_p = 1077.9\,MeV \quad (**).$$

Putting this into (*) gives us: $\left(E_n - E_{\pi^0}\right)\left(1077.9\,MeV\right) = 8.646 \times 10^5 (MeV)^2$ or

$E_n - E_{\pi^0} = 802.1MeV$. Adding this equation to equation (**) gives us:

$$E_n = 940\,MeV \Rightarrow E_{\pi^0} = 137.9\,MeV \quad .$$

To find the kinetic energy, one simply subtracts from these numbers the rest energy numbers which are 139.6 for the pion and 939.6 for the neutron. Note that the pion has much more kinetic energy because its lighter.

ג. (5 נק') כמה אנרגיה משתחררת מכדור אורניום235 בעל מסה של 2 kg בשניה אחת ?

$^{235.0439}U \rightarrow {}^{231.0363}Th + {}^{4.002}\alpha$ (המספרים הם המסות ביחידות של מסה אטומית),

כאשר $T_{½}$=703 Myears

As t=1s is much smaller than $T_{½}$=703 Myears= 2.2 10^{16}s, we can develop the normal formula or he number of decaying atoms in a taylor series.

The original formula of $N_D\big|_{t=1} = N_0\left(1-e^{-\lambda t}\right) = N_0\left(1-e^{-\frac{t\ln 2}{T_{1/2}}}\right)$ then turns into

$N_D\big|_{t=1} \approx N_0\left(1-1+\frac{t\ln 2}{T_{1/2}}\right) = 6.253\times10^{-17}N_0$, and with $N_0 = \frac{2\,kg}{M_u(U)} = 5.095\times10^{24}$

we find: $N_D = 318.6$

The energy released in one decay is: $E_0 = \Delta mc^2 = \left(m_u - m_{Th} - m_\alpha\right)c^2$ and that gives

$$E_0 = \left(235.0439u - 231.0363u - 4.002u\right)c^2 = 0.0056\underbrace{uc^2}_{931.5MeV} = 5.22\,MeV$$

The total energy released in one second is then: $E = E_0\cdot N_D = 2.66\times10^{-10}J$,

which is an extremely small amount of energy.

ד. (3 נק') לאור תוצאתך בסעיף ג' איך את/ה מסביר את האנרגיה הרבה המשתחררת בפיצוץ גרעיני ?

There is one main difference:
The life time of the decay of Uranium is so long that even if a lot of energy would be released, it would have to be averaged out over extremely long times, and hence the energy per second would be very small. On the other hand, in a nuclear explosion, the Uranium process is stimulated by particles (neutrons) and energy coming from the other splitting atoms and so the whole process is enhanced and takes place in a very short time.

Another answer which I would accept as adding some points is:
In a nuclear explosion, the Uranium splits into 2 equal sized nucleus, namely, it reduces its atomic number A by half. This is a drastic change which results in a drastic change in the binding energy (אנרגית הקשר – ראה גרף בדף הנוסחאות) and releases a lot of energy. In the case of the nuclear decay presented in the previous article, there is no such drastic change in A.

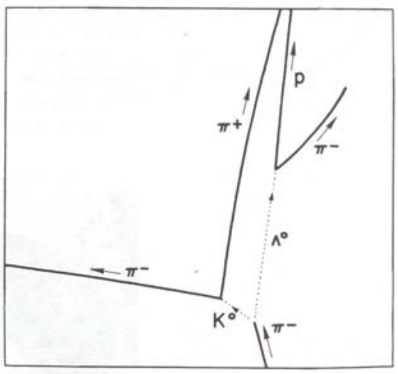
חלק ב' (ענה/י על 1 מתוך 2 השאלות הבאות)

5. (25נק') חלקיקים

א.(5נק') למה לדעתך מתפרק חלקיק מסוג קאון טעון ונייטראלי ובאיזה סוג של אינטראקציה?

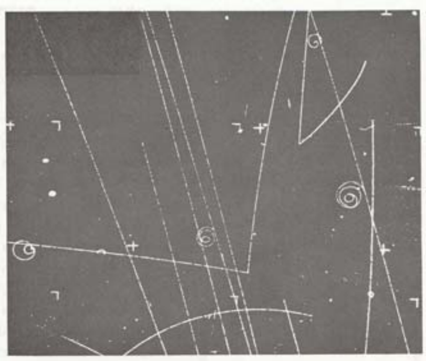
From the particle table in the equation sheet, one can observe that the lifetime of the neutral kaon is much shorter than the lifetime of the charged kaon. This indicates that the force taking part in the decay of the neutral kaon is stronger than the force which is responsible for the decay of the charged kaon. Although the kaon system is more complicated from the pion system, the explanation I expected from the student is the same as the explanation for the difference between the lifetime of the neutral pion and the charged pion. Namely, a neutral pion or for that matter any neutral meson particle is built from a quark and its anti-quark, and these two can annihilate each other in an electro magnetic interaction and create other mesons (pions, in the case of a kaon decay). The charged masons on the other hand are built from different type quarks and cannot annihilate each other. They have to decay through the weak interaction into mainly leptons. For details see that decay table we discussed in class.

ב. (15נק') חלקיק מסוג פיון שלילי מגיע מהחלל וניכנס לתא בועות ושם הוא מתנגש בפרוטון. צייר ותאר תהליך ארוך אחד של כמה צמתי שינוי של יצירה והתפרקות (עד לחלקיקים יציבים) של מה יכול לקרות בתא אם נתון שבתהליך הראשון נוצרה מוזרות באמצעות הכח החזק. תאר בדיגרמת פיינמן (כולל קווארקים) את התהליך הראשון. לגבי שאר הצמתים של שינוי הסבר מה היה לפני ומה היה אחרי, איזה כוחות פעלו ואיזה חוקי שימור נישמרו (אין צורך להזכיר את נושא הקווארקים).



איור 3.7: ריאקציה של π^- ופרוטון כפי שצולמה בתא בועות (למעלה) וזיהוי מסלולי החלקיקים המשתתפים בריאקציה (למטה).

We have discussed this picture in class. For completeness I also bring the original picture that was observed in the experiment.

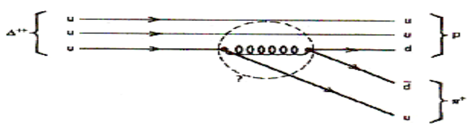


NOTE: In the question I said that the interaction took place through the strong force!!! As the strong force conserves the strangeness number, and as the initial particles had no strangeness, it is clear that the products of the first interaction should have a total of zero strangeness as well. Anyone who gave an answer where no particle with a strangeness number different than one is produced, or where the total strangeness number becomes different from zero after the interaction – is wrong!!!
In the above case the total strangeness remains zero as the lambda and kaon particles have opposite strangeness numbers.

Later on, to conserve the baryon number, the lambda decays into a stable baryon (the proton). The kaon also undergoes decay into lighter mesons.

ג. (5נק') חלקיק מסוג דלתה (Δ^{++}) מתפרק בעזרת הכח החזק לפרוטון ופיון. תאר בעזרת דיאגרמת פיינמן (כולל קווארקים את תהליך ההתפרקות).

First of all, to conserve the charge, the pion has to be a positively charged pion.
In class we have discussed the following Feynman diagram:



6. (25 נק') קוונטים

א. (5נק') צייר את פונקצית הגל של חמשת הרמות הראשונות של בור פוטנציאל אינסופי. אם חלקיק נמצא ברמה הרביעית, ואם נבצע מדידה של מיקומו המדויק של החלקיק, מה הסיכוי שנמצא אותו בטווח מאוד קטן ממרכז הבור?

We first note that as its an INFINITE well, there is no tunneling and therefore who ever made a drawing in which the tails of the wave functions penetrate into the potential walls, should note get points for this article.

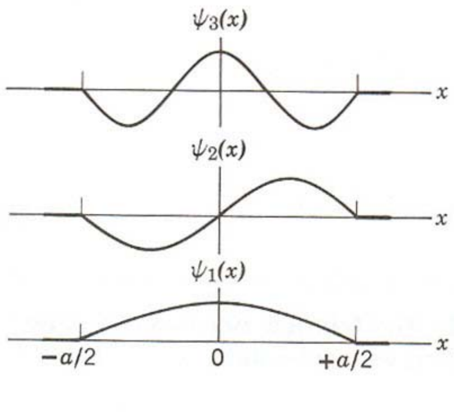


Figure 6-31 The first few eigenfunctions of infinite square well potential.

As one can see, from the periodic conditions on k (which we have developed in class) every wave function has one more extreme point (maximum or minimum) relative to the previous wave function. Furthermore, the function alternate between even and odd. The fourth function will therefore be odd with 4 extreme points. The fifth will be even with 5 extreme points.

As the fourth is odd, and as the probability to find a particle is just $P(x)=|\psi|^2$, the chances of finding a particle in the center of the well are extremely small.

ב. (5נק') חלקיק חופשי נע משמאל לימין עם אנרגיה E עד שהוא פוגע במחסום פוטנציאל בעל גובה V. אם V>E צייר את צפיפות ההסתברות של הימצאות החלקיק לפני, בתוך ואחרי המחסום, והסבר בעזרת נוסחאות כיצד הגעת לציור זה.

As we discussed in class, for a finite barrier $P(x)=|\psi|^2$ has the form:

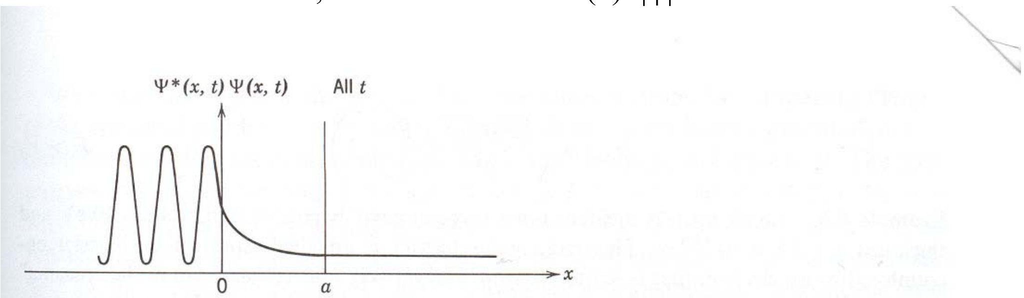


Figure 6-14 The probability density function $\Psi^*\Psi$ for a typical barrier penetration situation.

Lets explain from left to right all three regions:
I) on the left of the barrier, there is reflection and so the wave function has the form $\exp[-ik_1x]+\exp[ik_1x]$, which takes the form of a sin or cos periodic function, and maintains this periodicity also after the squaring required for P(x).
II) inside the barrier, the wave function in principle looks like $\exp[-ik_2x]$ where $k_2=\mathrm{sqrt}[2m(E-V)]/\hbar$. However, inside the forbidden region k becomes imaginary as $E<V$. We can thus define a real k_2', by writing $k_2'=\mathrm{sqrt}[2m(V-E)]/\hbar$, and the wave function then becomes $\exp[-k_2'x]$, where k' is the decay constant. This form remains also after the squaring of the wave function.
III) after the barrier, there is again no movement to the left (no reflection) so the wave function is simply $\exp[-ik_3x]$. This becomes a straight line (constant) after squaring.

ג. (5נק') מהי הנוסחא לרמות האנרגיה של חלקיק בבור פוטנציאל הרמוני? הסבר מה ייחודי בנוסחא זו.

The equation which we have also discussed in class is $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ where omega is the frequency of the harmonic movement in a potential $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$, and n is the number of the level. The unique point about this is that the the energy different between every two adjacent levels is always the same. This is not the case for quare wells.

ד. (5נק') מהו רוחב הספקטרום (line width) של לייזר שזמן הפולס שלו הוא פמטו שנייה (femto second)?

Femto second means of course 10^{-15} second. From the uncertainy principle we know that $\Delta E \Delta t \sim \hbar/2$. This means that is a laser sends a light pulse with the temporal (time) length of femto second, the energy spread of the photons cannot be less than $10^{15}\hbar$ Joule or 10^{15} Hz.

ה. (5נק') כפי שכל כימאי יודע וכפי שלמדנו בכיתה כל רמה אטומית בעלת מספרים קוואנטיים n ו- l (L קטן) יכולה להכיל מקסימום 2(2l+1) אלקטרונים. הסבר את המקור למספר זה?

We have explained in class that for each n level, l=0,1,…n-1 (l is the orbital angular momentum). This means 2l+1 projections on the z axis (noted by ml). As the Pauli exclusion principle states that two fermions (spin half particles) cannot be at the exact same quantum state if they are at the same position, each quantum level of the atom (denoted by n, l, m) can only hold 2 electrons (as they have two possibilities for their spin).Therefore, the total number of electrons each shell (n,l level) can hold is 2(2l+1).

<u>שאלות בונוס</u>

7. (10 נק') נניח שקיימת קובייה מחומר מאוד רגיש לאור שמתקלקל אם פוגע בו אפילו פוטון אחד. ונניח שלפניך מצבור של קוביות כאלו שחלק מהן לא עובד (כלומר החומר מקולקל). נניח גם שחומר מקולקל משמעו שיש בו חור ואור יכול לעבור דרכו. הסבר כיצד ניתן לבחון אילו קוביות טובות ואילו מקולקלות מבלי לקלקל את כל הקוביות הטובות (הנח שכל בדיקה שהיא דורשת שקרן אור תפגע באובייקט שבו אתה מעוניין, שכן אחרת הוא יישאר חשוך ולא תוכל לדעת עליו דבר). איזה אחוז מהקוביות הטובות ישרוד את הבדיקה שאתה מציע?

See lesson 3 in the course. There we have reviewed how a Mach-Zehnder interferometer may take advantage of the non locality of the photons to create a measurement "without interaction".

To calculate what percentage of the good light sensitive cubes will remain unharmed by the measurement, we consider the fact that we place the cube in one of the interferometer arms between the two beam splitters. This means that if the cube is good, 50% of the photons going into the interferometer will hit it and destroy it. But this is not all, out of the 50% of the case where the good cube as not destroyed, only 50% of the cases will give us the knowledge that the cube is good. The reason is that if only one of the interferometer paths is open (this is the case for a good cube), the photons reaching the second beam splitter through the open path will randomly split 50%/50% in the second beam splitter. Only the half which reaches the "dark detector" (this is the detector that never receives photon when the interferometer is working normally), will tell us there is an object that is blocking one of the paths of the interferometer (i.e. there is a good cube there). Bottom line, we will be able to check which cubs are good, with a success rate of only 25%.

8. (5 נק') חלקיק חופשי נע משמאל לימין עם אנרגיה E עד שהוא פוגש מחסום פוטנציאל בגובה V וברוחב W (כלומר גבולותיו ב- x=0 וב-x=W), כאשר E<V. במרחק D מסוף המחסום הזה מתחיל מחסום נוסף וזהה (כלומר גבולותיו ב- x=W+D וב- x=2W+D). מהם לדעתך תנאי השפה ב- x=W וב- x=W+D כדי שהחלקיק ישהה זמן מקסימלי באיזור שבין שני המחסומים? איזה אפקט פיסיקלי זה מזכיר לך?

In principle, once the particle penetrated the first barrier (and is now between the two barriers), we don't want tunneling to occur, as the goal is for the particle to be the longest possible time between the two barriers. More precisely, we want to minimize the probability density outside the two barriers (i.e. at $x=0$ and $x=2W+D$). To do this, the best way is to minimize the probability density on the inner borders of the two barriers (i.e. at $x=W$ and $x=W+D$). These are the required boundary conditions.

This very much reminds of a string on a guitar. The string has zero amplitude at the edges where it is held and this created the conditions for the sound that it can make i.e. that $D=n\lambda/2$, where λ is the wave length ($k=2\pi/\lambda$). In analogy, in our problem, if you send into this system a particle with a wave function that obeys $D=n\lambda/2$, the particle will stay between the two barriers for a long time. This effect is also used in optical cavities (two mirrors facing each other) called Fabrey-Perot, which are used to trap light.