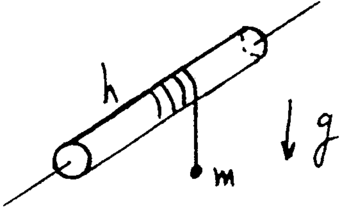
תרגיל מס' 122 (C.G.S.)

נתון גליל מבודד בעל רדיוס R ואורך h. קליפת הגליל טעונה במטען Q המפוזר על פניה בצורה אחידה. במרכז הגליל כרוכה מסה m הנופלת כלפי מטה וגורמת לפיכך לסיבוב הגליל סביב צירו.

חשב את תאוצת m.



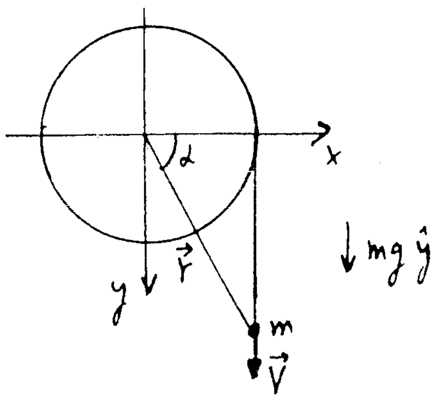
הערה

הזנח את מומנט האינרציה של הגליל והתייחס למסה m כנקודתית.

פתרון

נערוך את תרשים הבעיה-

(z פנימה לדף)



נרשום את התנע הזויתי של m

ביחס לראשית

$$\vec{J} = \vec{r} \otimes \vec{p} = \vec{r} \otimes m\vec{V} = m(x\hat{x} + y\hat{y}) \otimes V\hat{y}$$

ביצוע המכפלות נותן

$$\vec{J} = mVx\hat{z} = mVR\hat{z}$$

מכאן

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = m\dot{V}R\hat{z} = mR^2\dot{\omega}\hat{z} = I\dot{\omega}\hat{z} = N_{tot}$$

I-ומומנט האינרציה של m ביחס לראשית (השתמשנו גם בקשר $\dot{V}=\dot{\omega}R$).

הגליל הנ"ל "מרוח" במטען Q (צפיפות $\sigma=Q/2\pi Rh$) כאשר מהירותו הזויתית הולכת וגדלה. מכאן שהזרם שנוצר מסיבוב הגליל הולך וגדל. כלומר, $\vec{B}$ הנוצר לאורך ציר הגליל הולך וגדל. דבר זה גורם להשראת שדה חשמלי לאורך היקף הגליל, שעל פי חוק לנץ מתנגד לתאוצה הזויתית של הגליל היוצרת את גידול השטף המגנטי.

בקירוב טוב ניתן לראות את הגליל כסולנואיד אינסופי שזורם בו זרם רגעי $I(t)$. נניח שהשדה המגנטי קבוע בכל נפח הגליל (אם כי יש אפקטי שפה שכאן הם לפחות מסדר R/h). המטען ליחידת אורך הוא Q/h. לכן המטען על טבעת בעובי dx הוא Qdx/h. אם $d\alpha$ הוא אלמנט זוית על הטבעת, אזי המטען של $d\alpha$ הוא $(dxQ/h)(d\alpha/2\pi)$. לכן הזרם הזורם עקב טבעת זו הוא

$$I\,dx = Q\frac{dx}{h}\cdot\frac{\omega}{2\pi} = Q\frac{dx}{h}\cdot\frac{d\alpha}{2\pi dt}$$

מכאן שהזרם ליחידת אורך הינו

$$I = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta x}\right) = \frac{Q}{h}\frac{\dot{\alpha}}{2\pi} = \frac{Q}{h}\frac{\omega}{2\pi}$$

בסולנואיד אינסופי השדה המגנטי בכיוון הציר קבוע בנפח הסולנואיד ונתון ע"י

$$B = \frac{4\pi I' n}{c}$$

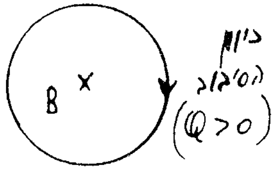
n - מספר הכריכות ליחידת אורך, I' - הוא הזרם ליחידת אורך. במקרה שלנו

$$nI' = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{Q}{h} = I$$

מכאן

$$B=\frac{2\omega Q}{ch}$$

כיוון B הינו ע"פ כלל יד ימין (לתוך הדף), כלומר $\vec{B}=\hat{z}$. מכאן



$$\vec{B}=\frac{2\omega Q}{ch}\hat{z}$$

השטף המגנטי דרך הגליל <u>לתוך הדף</u>:

$$\Phi_B=\int \vec{B}\cdot\hat{n}\,ds=\frac{2\omega Q}{ch}\pi R^2$$

שטף זה משרה שדה חשמלי ע"פ .

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=2\pi R E_\theta=\int d\vec{S}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{2\pi R^2 Q}{c^2 h}\dot{\omega}$$

כאשר הנורמל $\hat{n}$ בכיוון $\vec{B}$, פנימה לדף, $\hat{z}$. לכן C מקיף את מעטפת הגליל בכיוון הסיבוב (ע"פ כלל יד ימין). מכאן

$$E_\theta=-\frac{RQ}{c^2 h}\dot{\omega}$$

כלומר, הפוך לכיוון התנועה. מכאן ש-E_θ מפעיל כוח על המטענים בכיוון הפוך לכיוון התנועה (ע"פ חוק לנץ $\vec{E}$ שואף לבטל את הסיבה שיצרה אותו).

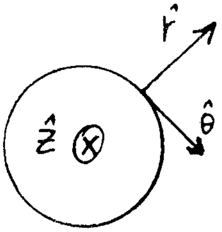
אם נרשום

$$\vec{E}=-\frac{RQ}{c^2 h}\dot{\omega}\hat{\theta}$$

הרי שהכוח הפועל על פס בעל עובי זויתי dα המקביל לציר הגליל יהיה לכן

$$d\vec{F}=\vec{E}\sigma R h\,d\alpha=-\frac{RQ^2}{2\pi c^2 h}\dot{\omega}\,d\alpha\,\hat{\theta}$$

והמומנט



$$dN_1=\vec{r}\otimes d\vec{F}=-\frac{R^2 Q}{c^2 h}\dot{\omega}\frac{Q\,d\alpha}{2\pi}\hat{r}\otimes\hat{\theta}=-\frac{R^2 Q^2}{2\pi c^2 h}\dot{\omega}\,d\alpha\,\hat{z}$$

כאשר השתמשנו בכך ש- $\vec{r}=R\hat{r}$.

סה"כ המומנט יהיה לפיכך

$$\vec{N}=\vec{R}\otimes mg\hat{y}+N_1=\left(mgR-\frac{R^2Q^2\dot{\omega}}{c^2 h}\right)\hat{z}=\frac{d\vec{J}}{dt}=I\dot{\omega}\hat{z}=mR^2\dot{\omega}\hat{z}$$

מכאן

$$mgR=\left(\frac{R^2 Q^2}{c^2 h}+mR^2\right)\dot{\omega}$$

או

$$\dot{\omega} = \frac{a}{R} = \frac{mgR}{\frac{R^2Q^2}{c^2h} + mR^2}$$

חילוץ a נותן

$$a = \frac{mgR^2}{mR^2 + \frac{R^2Q^2}{c^2h}} = \frac{g}{1 + \frac{Q^2}{mc^2h}}$$