תרגיל מס' 116

בתחום מסויים פועל שדה מגנטי התלוי במקום ובזמן באופן הבא:

$$\vec{B}(\vec{r},t)=B_0\, r\sin(\omega t)\,\hat{z}$$

1. קבע אם מערכת הקורדינטות בה מתואר $\vec{B}$ הינה גלילית או כדורית.
2. מהו השדה החשמלי המושרה בנקודה $\vec{r}_0=r_0\hat{x}$?
3. חשב את צפיפות הזרם $\vec{J}$. מה תוכל להסיק מכך לגבי האיזור בו קיימים השדות $\vec{B}$ ו-$\vec{E}$?

פתרון

1. ברור שמדובר כאן במערכת גלילית. אם היתה זו מערכת כדורית הרי

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\frac{\partial B}{\partial z}\neq 0$$

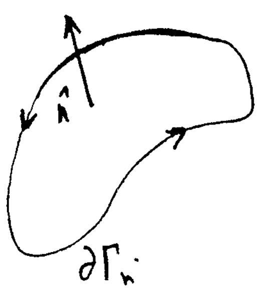
2. נעיין במשוואת מקסוול $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. ההצגה האינטגרלית של משוואה זו (בעזרת משפט סטוקס)

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{a} \qquad (116\text{-}1)$$

השדה החשמלי המושרה חייב להיות בעל סימטריה גלילית במישור ניצב לציר z.

<u>הסבר</u>

נעיין בהגדרה האינפיניטסימלית של curl (רוטור)



$$\hat{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\lim_{|\Gamma_n|\to 0}\frac{\oint_{\partial\Gamma_n}\vec{A}\cdot d\vec{\ell}}{|\Gamma_n|}$$

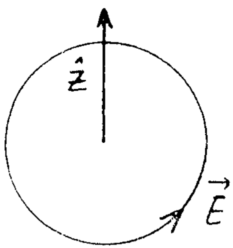
כאשר Γ_n הוא משטח אינפיניטסימלי ש-$\hat{n}$ הנורמל שלו,

$\partial\Gamma_n$ שפתו ו- $|\Gamma_n|$ שטחו. ברור מהנתון ש- $\hat{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})=0$ גלובלית אם $\hat{n}\perp\hat{z}$,
לכן גלובלית קוי השדה של $\vec{E}$ חייבים להיות במישור ניצב לציר z. הוסיפו לזה
את העובדה שאין תלות ב-$\hat{\theta}$ וקבלו את הסימטריה הנ"ל.

2. נבחר לכן מסלול מעגלי ברדיוס r_0 שמרכזו בראשית ונקבל מ-(116-1)

$$2\pi r_0 E(\vec{r}_0) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{r_0} B(r,t)\,2\pi r\,dr = -\frac{\partial}{\partial t} B_0 \sin(\omega t)\frac{2\pi r_0^3}{3}$$

כלומר



$$\vec{E}(\vec{r}_0,t)=\frac{\omega B_0 r_0^2}{3}\cos(\omega t)\left[\hat{z}\times\hat{r}\right]$$

אם נרשום, $\vec{r}=r_0\hat{r}=x_0\hat{x}+y_0\hat{y}$, הרי שמביצוע
המכפלות הוקטוריות נקבל

$$\vec{E}(\vec{r}_0,t)=\frac{\omega B_0}{3}\cos(\omega t)\left[r_0 x_0\hat{y}-r_0 y_0\hat{x}\right]$$

לכן בנקודה $\vec{r}=r_0\hat{x}$ השדה החשמלי המושרה הינו

$$\vec{E}(\vec{r}_0,t)=\frac{\omega B_0 r_0^2\cos(\omega t)}{3}\hat{y}$$

3. מאחת ממשוואות מקסוול ניתן לחשב את $\vec{J}$

$$\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}\Leftarrow\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c$

אם נציב את $\vec{B}$ מהנתון ו-$\vec{E}$ שחושב בסעיף (2) נקבל

$$\vec{J}=\hat{r}\times\hat{z}\frac{B_0}{\mu_0}\sin(\omega t)\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 r^2\right]=-\hat{\theta}\frac{B_0}{\mu_0}\sin(\omega t)\left[1-\frac{K^2}{3}r^2\right]$$

(k=w/c) מהתוצאה שהתקבלה ברור שבאיזור בו מתקיימים השדות הללו, הזרם גדל
כמו r^2 בכיוון $\hat{\theta}$. מכאן המסקנה פשוטה: איזור זה חייב להיות מוגבל, מכיון
שלא קיימים זרמים אינסופיים.