

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה לפיסיקה

מתאם סיבובי במערכות כוכבים זוגיות

חיבור זה מהווה חלק מהדרישות לקבלת תואר "מגיסטר" בפקולטה למדעי הטבע.

נצח פרביאש

ינואר 2003

שבט תשס"ג

נושא החיבור: מתאם סיבובי במערכות כוכבים זוגיות

חיבור לשם קבלת תואר "מגיסטר" בפקולטה למדעי הטבע

מאת: נצח פרביאש

שם המנחה: פרופ' רפאל שטייניץ

המחלקה לפיסיקה

הפקולטה למדעי הטבע

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

תאריך _____

חתימת המחבר _____

תאריך _____

אישור המנחה _____

תאריך _____

חתימת יו"ר ועדה מחלקתית _____

הבעת תודות

עבודה זו נעשתה בהדרכתו המסורה והצמודה של פרופ' רפאל שטייניץ. ברצוני להודות ולהביע רגשי הוקרה עבור העזרה הרבה, השותפות והתמיכה שהעניק לי בהנחייתו במהלך כתיבת העבודה ובשנים שקדמו לה בה הייתי סטודנט במחלקה לפיסיקה. אני רוצה להודות לפרופ' שטייניץ על הסיוע הרב בביצוע המחקר, בעידוד בשעות הקשות, בדחיפה קדימה ובשאיפה למצוינות שליוו את השנים האחרונות וכן על שיחות רבות על נושאים שונים בפיסיקה, אך גם על נושאים רבים אחרים.

אני רוצה לנצל במה זו כדי להודות לסגל המחלקה לפיסיקה, לכל אותם אנשים שאתם התייעצתי בנושאים רבים ושאלתי שאלות אין ספור.

במיוחד אני רוצה להודות על העבודה המסורה של מזכירות המחלקה לפיסיקה ושל מזכירות הפקולטה למדעי הטבע, שהפכו עניינים בירוקרטים מסובכים לבעיות מינוריות. תודה על העזרה בדברים ה"קטנים".

אני מודה לאשתי, טלי, על העזרה הרבה שנתנה בכל דבר אפשרי, כדי שעבודה זו תצא אל הפועל.

מוקדש לזכרם של
בני משפחת פרביאש
אשר נרצחו בשואה

תוכן עניינים

1	מבוא	1
1.1	רקע כללי	1
1.2	סוגים של מערכות כוכבים זוגיות	4
1.2.1	זוגות אופטיים	4
1.2.2	זוגות נראים	4
1.2.3	זוגות אסטרוטריים	5
1.2.4	זוגות ספקטרוסקופיים	6
1.2.5	זוגות ספקטראליים	7
1.2.6	זוגות לוקים	8
1.3	המכניקה של מערכות כוכבים זוגיות	9
2	רקע מתמטי	12
3	מדגם המחקר	19
4	המחשת התפלגות מהירויות	21
5	אנליזה	23
5.1	מבחן ה- Ω	25
5.2	פונקצית ההתפלגות, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית	28
5.3	הצגה גראפית של מבחן הרגרסיה	32
5.4	מבחן המרווח הספקטראלי	37
5.5	מבחן השונות המשותפת	40
5.6	מבחן הקונבולוציה	43
6	מסקנות	46
7	נספח א' – מדידת היטל מהירות הסיבוב של כוכבים	48
8	נספח ב' – תוכנית המחשב	53
9	רשימת מקורות	75

מתאם סיבובי במערכות כוכבים זוגיות

מאת: נצח פרביאש

חיבור לשם קבלת תואר "מגיסטר" בפקולטה למדעי הטבע.

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה לפיסיקה

2003

תקצירבעבודה זו בחנו את מידת המתאם הסיבובי ב- 1010 מערכות כוכבים זוגיות.

במערכות זוגיות התנע המסילתי של זוג הכוכבים מגדיר כיוון במרחב. מהירות הסיבוב העצמי של כל כוכב במערכת זוגית וכן כיוונה במרחב עשויות אם כן להיות תלויות בכיוון זה. Abt (2001) מצא כי התפלגות כיווני ציר הסיבוב העצמי של כוכבים (ספין) הנה כנראה אקראית. Slettebak (1963) מצא כי אין הבדל בין מהירות הסיבוב של כוכבים בודדים ובין אלו השייכים למערכות זוגיות.

מחקרים קודמים דוגמת אלו של Steinitz and Pyper (1970), Bernacca (1972) ו- Levato (1974) הראו כי קיים מתאם בין היטל המהירות הסיבובית של כוכב אחד במערכת זוגית ובין היטל המהירות הסיבובית של הכוכב השני באותה מערכת. Steinitz and Pyper (1970) בדקו 50 זוגות נראים, Bernacca (1972) צמצם עוד יותר את המדגם שבדקו Steinitz and Pyper (1970) ו- Levato (1974) בדק כ- 100 זוגות כוכבים. לעומת זאת, המחקר הנוכחי מתבסס על נתונים אודות 1010 זוגות כוכבים מסוגים שונים.

מתוך הנתונים בנינו שלושה מדגמים:

א. מדגם אמיתי (Real Binaries) - RB - 1010 זוגות כוכבים (2020 כוכבים בודדים).

ב. מדגם מלאכותי (Artificial Binaries) - AB – בנינו זוגות מלאכותיים על-ידי כך שהצמדנו לכל כוכב מהמדגם האמיתי כבן זוג כל כוכב אחר מהמדגם, מלבד בן הזוג האמיתי שלו. מדגם זה כולל 2038180 מערכות כוכבים זוגיות מלאכותיות.

ג. מדגם מלאכותי מצומצם (Artificial Binaries, Restricted) - ABR – מדגם זה נבנה על בסיס המדגם המלאכותי AB תוך החמרת המגבלות המוטלות על המדגם. התנאי שנדרש מקבוצה זו הוא שהמרחק הספקטראלי בין שני בני זוג לא יעלה על שתי תת-רמות ספקטראליות. מדגם זה כולל 263344 מערכות כוכבים זוגיות עם המגבלה הנוספת.

על מנת לכמת את המתאם בין היטלי מהירויות הסיבוב של כוכבים במערכת

זוגית, ערכנו מספר מבחנים לכל אחד מהמדגמים (RB, AB, ABR):

(א) מבחן ה- Ω

(ב) פונקציית ההסתברות, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית

(ג) הצגה גראפית של מבחן הרגרסיה

(ד) מבחן המרווח הספקטראלי

(ה) מבחן השונות המשותפת (covariance)

(ו) מבחן הקונבולוציה

כל מבחן בודק היבט אחר של הבעיה. שילוב התוצאות מהמבחנים השונים

מאפשר לנו לקבל מסקנות מהימנות.

III

מהתוצאות שקיבלנו אנו מסיקים כי במערכות זוגיות אמיתיות יש מתאם (חזק) בין היטלי מהירויות הסיבוב של בני הזוג. גדלים אלו (היטלי מהירויות הסיבוב) תלויים בשני גורמים:

(א) חלוקת התנע הזוויתי המקורי.

(ב) הגיאומטריה של הבעיה אינה פריקה – כלומר, בשל מגבלות תצפית אין אנו

יכולים להפריד את הגודל הנמדד $v_k \sin i_k$ לגדלים v_k ו- $\sin i_k$.

ניתן לפרש את התוצאות שקיבלנו באופן הבא:

1. יש התאמה בין כיווני הספין של הכוכבים במערכת.
2. יש התאמה במהירות הסיבוב העצמי של הכוכבים בה.

היות ועדיין אין תיאוריה כללית מקובלת אודות היווצרות זוגות, התוצאות שהוצגו בעבודה זו יכולות להוות תנאי התחלה ואילוץ לתיאוריה כזאת, לכשתיווצר.

1. מבוא

1.1 רקע כללי

הפיסיקה של מערכות כוכבים זוגיות מהווה את אחד הנדבכים החשובים באסטרונומיה של ימינו. ניתן לאסוף מידע רב מניתוח הפיסיקה של מערכות כוכבים זוגיות, זאת משום שמדידה של מחזור סיבוב של זוג כוכבים וחקר הספקטרום של כוכבים אינם תלויים במרחק אל המקור (זאת במידה ואין חומר בין-כוכבי). ניתוח הפיסיקה של מערכות כוכבים זוגיות הנו חיוני לקביעת המסות והרדיוסים של כוכבים (היום קיימות שיטות עקיפות נוספות למדידת רדיוסים, אולם הן מדויקות הרבה פחות ואינן מספקות מידע לגבי כוכבים הנמצאים על הסדרה הראשית). בכוכבים לוקים אנו מודדים בנוסף האפלת שפה (Limb darkening), המאפשרת קבלת מושג על המבנה התרמי של אטמוספירת הכוכב. פרמטרים נוספים כגון ממדי המערכת הזוגית, מהירות הכוכבים במערכת והמרחק בין בני הזוג ניתנים גם הם למדידה במערכות זוגיות.

Slettebak (1963) מצא כי אין הבדל בין התפלגות מהירויות הסיבוב (גודל הספין) של כוכבים בודדים ובין זו של כוכבים השייכים למערכות זוגיות. מאוחר יותר מצא Abt (2001) כי גם התפלגות כיווני ציר הסיבוב העצמי של כוכבים (כיוון הספין) הנה כנראה אקראית. במערכות זוגיות התנע המסילתי של זוג הכוכבים מגדיר כיוון במרחב. מהירות הסיבוב העצמי של כל כוכב במערכת זוגית וכן כיוונה במרחב עשויות אם כן להיות תלויות בכיוון זה.

נשאלת אפוא השאלה האם התפלגויות היטלי המהירויות הסיבוביות ($v \sin i$) והתפלגות כיווני הספין הן שונות עבור כוכבים המהווים חלק ממערכת זוגית לעומת כוכבים בודדים. ככל שבני הזוג קרובים יותר זה לזה, יש להניח כי ההשפעה ההדדית הולכת וגדלה ומתבטאת בכוחות גאות ושפל. כוחות אלה יכולים לשנות בהדרגה את תכונות הסיבוב העצמי המקורי (ראה לדוגמא את הירח המפנה אל כדור הארץ תמיד את אותו צד). לכן, עבור מערכות זוגיות קרובות אנו מצפים למצוא מתאם בין

מהירויות הסיבוב. חיזוק לכך נתן Zahn (1977) כשפיתח תיאוריה לסנכרון בין בני זוג במערכות כוכבים זוגיות קרובות. מחקרים נוספים דוגמת אלו של Levato (1974, 1976), Giuricin, Mardirossian, and Mezzetti (1984), ו-Pan (1997) סיפקו הוכחות מדידות לכך שאכן קיים סנכרון בין בני זוג של מערכות כוכבים זוגיות קרובות.

ברור אפוא כי עבור מערכות כוכבים קרובות נגלה כי התפלגות מהירות הסיבוב של שני הכוכבים במערכת תהיינה דומות מאוד ובהכרח לא אקראיות כמו התפלגות מהירות הסיבוב של כוכבים בודדים. מאידך, הנחה רווחת היא שמפאת המרחק הגדול בין בני זוג במערכות זוגיות נראות (Visual Binaries), תכונות הסיבוב העצמי משתמרות ומעידות על התנאים ששררו בעת היווצרות המערכת. כלומר, כאשר המרחק בין בני זוג במערכת זוגית הוא גדול, כוחות הגאות ושפל זניחים ומשמעות הדבר שלא נראית סיבה לפיה יהיה מתאם בין פונקציות התפלגות המהירויות של שני כוכבים במערכת כזאת. זאת הסיבה לכך שהתוצאות שקיבלו Steinitz and Pyper (1970) אשר מצאו כי אכן קיים מתאם מסוים בין ההיטלים של מהירויות הסיבוב של כוכבים ב- 50 במערכות כוכבים זוגיות נראות (Visual Binaries) עשויות להיות מפתיעות. על-ידי צמצום מדגם המחקר והוצאת זוגות "בעייתיים" Bernacca (1972) מצא מתאם אף טוב מזה של Steinitz and Pyper (1970) עבור היטלי מהירויות הסיבוב של רכיבים במערכות זוגיות נראות. Levato (1974) הרחיב את המדגם שבו השתמשו Steinitz and Pyper (1970) מחמישים זוגות ליותר ממאה. וקיבל מתאם דומה לזה של Steinitz and Pyper (1970) עבור מערכות זוגיות נראות.

בזמן ההיווצרות של מערכת כוכבית זוגית התנע הזוויתי המקורי של המערכת התחלק (באופן כלשהו) לתנע זוויתי מסילתי ולזה של הספינים של הכוכבים במערכת. במקרה שבו שני כוכבים במערכת זוגית נוצרו באותו זמן, אנו משערים כי הספינים שלהם יהיו מקבילים זה לזה וזאת במידה ולא היו למערכת הפרעות

חיזונית. אם אכן זהו המצב, אנו מצפים לקבל מתאם ברור בין היטלי מהירויות הסיבוב ($v \sin i$) של בני זוג במערכת זוגית. השמש וכוכבי הלכת (מלבד אוראנוס), על אף שהנם מערכת מרובה, מדגימים עקרון זה. עבור כיווני הספין שלהם אנו מוצאים מתאם מצוין, כך שניתן להגיד שמלבד אוראנוס הספינים של כל כוכבי הלכת במערכת השמש הם למעשה מקבילים.

במשך שלושים השנים האחרונות הצטברו נתונים רבים אודות היטלי מהירות הסיבוב של כוכבים הנמצאים במערכת זוגית. מטרת המחקר הנוכחי היא לחזור ולבדוק היש מתאם בין היטלי מהירויות הסיבוב של זוג כוכבים בני אותה מערכת זוגית - עבור יותר מאלף מערכות כוכבים שנתוני היטל מהירויות הסיבוב שלהם ידועות כיום (על הבעייתיות שבמדידת היטל המהירות הסיבובית - ראה נספח א'). כלומר, האם באופן סטטיסטי יש מתאם בין היטל מהירות הסיבוב של רכיב אחד ממערכת זוגית לבין היטל הסיבוב של הרכיב השני באותה מערכת.

החשיבות של המחקר הסטטיסטי הנוכחי נעוצה בנקודת המבט הרחבה שהמחקר נותן. אין אנו בוחנים מערכת זו או אחרת באופן ספציפי, אלא מביטים בהתנהגות כללית של המערכות הפיסיקליות הנבדקות. הבנה של נושא זה עשויה לתרום:

(א) להבנת הפיסיקה של מערכות כוכבים זוגיות.

(ב) תוצאות המחקר עשויות אולי להוות קביעה של תנאי התחלה עבור היווצרות

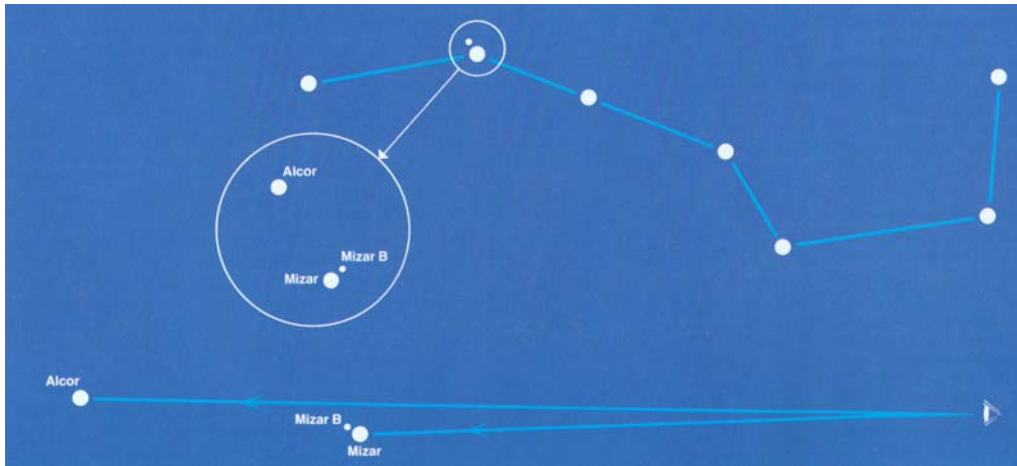
של מערכות זוגיות.

בסעיפים הבאים נציג את הסוגים השונים של מערכות כוכבים זוגיות ונתאר בקיצור את המכאניקה שלהן. לאחר מכן נציג את הרקע המתמטי המהווה בסיס ומוטיבציה למבחנים שאנו עורכים כדי לקבוע את מידת התאום בין היטלי מהירות הסיבוב של בני זוג במערכת כוכבים זוגית.

1.2 סוגים של מערכות כוכבים זוגיות ודוגמאות

1.2.1 זוגות אופטיים (כוכבים כפולים) – אלו הם למעשה כוכבים שאין ביניהם קשר

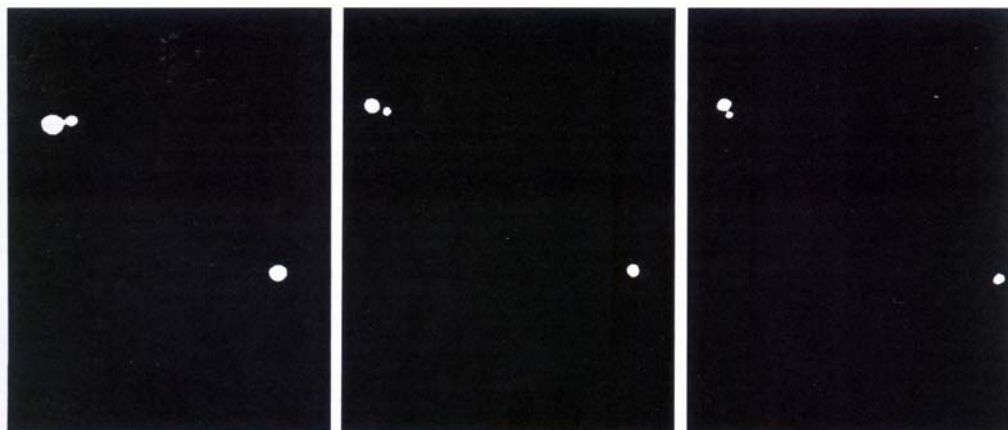
פיסיקלי כלשהו, אולם מבחינת הצופה הם נראים כזוג משום שבאקראי שניהם מופיעים כמעט על אותו קו ראייה (ראה איור 1).



איור 1. Alcor ו-Mizar הנמצאים בקבוצת הדובה הגדולה הם זוג אופטי. Mizar עצמו הוא זוג נראה שבו כל אחד מהרכיבים הוא מערכת ספקטרוסקופית בעצמו, וייתכן מאוד כי Mizar B הנו למעשה מערכת משולשת (Audouze and Israël, 1988).

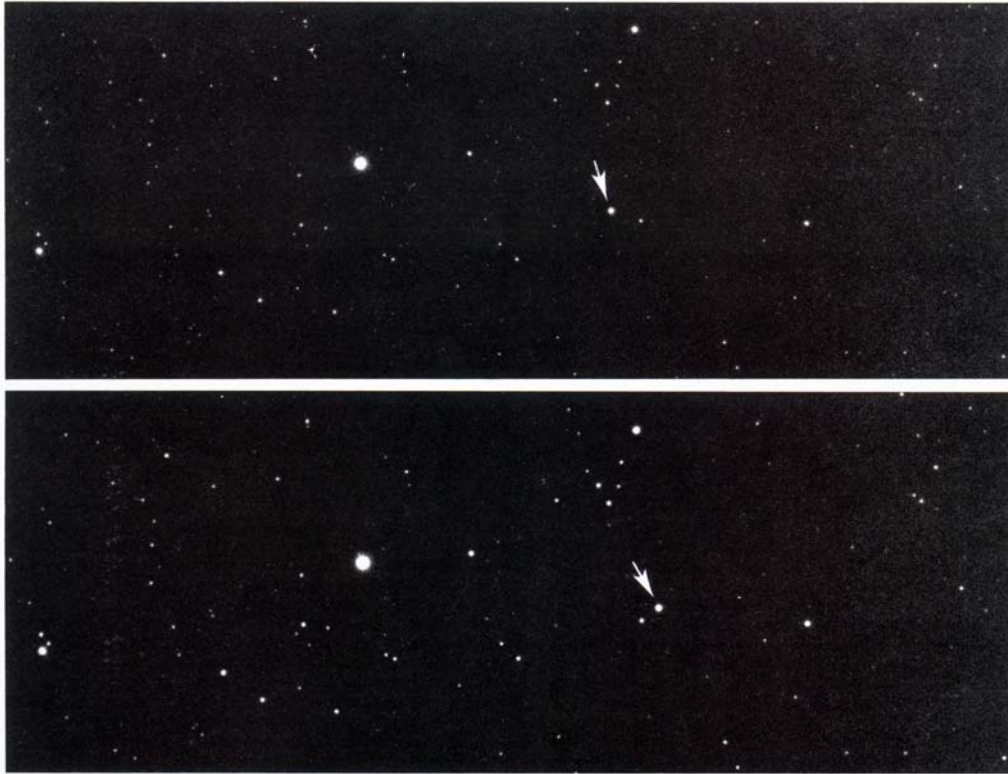
1.2.2 זוגות נראים – אלו הם זוגות אמיתיים שבהם המרחק בין שני הכוכבים

במערכת הזוגית הוא גדול מספיק כדי שניתן יהיה לזהות שמדובר בזוג כוכבים (ולא בכוכב בודד). במערכות אלו כל רכיב במערכת הזוגית ניתן לתצפית בנפרד (ראה איור 1 - Mizar ואיור 2).



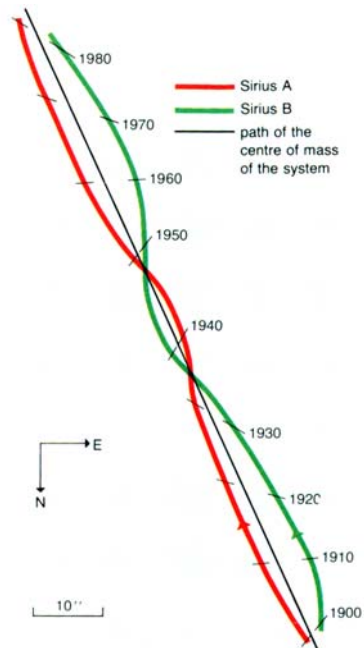
איור 2. צילומי הכוכב Kruger 60 בשנים 1908, 1915 ו-1920 (משמאל לימין) (צולמו על-ידי E. E. Barnard) המראים את השינוי במיקום של הרכיבים A (הכוכב הראשי הוא הכוכב הבהיר במערכת) ו-B במהלך 12-שנים (Audouze and Israël, 1988).

1.2.3 זוגות אסטרונומיים – במערכות כאלו, רק רכיב אחד נראה בתצפית ישירה, אולם תנועתו מראה שהיא מושפעת מנוכחות רכיב נוסף, בלתי נראה. על-ידי ניתוח התנועה של הרכיב הנראה, ניתן לחקור פרמטרים של המערכת כגון זמן המחזור, המרחק בין רכיבי המערכת והמסה הכללית שלה (ראה איור 3).



איור 3. התנועה של כוכב ברנארד (Barnard) במהלך 10 שנים (Audouze and Israël 1988).

בסל (Bessel) בחן בשנת 1844 את תנועתו של הכוכב סיריוס (Sirius) והסיק שהכוכב הזה הוא רכיב של מערכת זוגית שמחזור הסיבוב שלה הוא 49 שנה (ראה איור 4). עשרים שנה מאוחר יותר הובחן גם הבן-זוג, ונמצא שהוא ננס לבן שמסתו 0.9 מסות שמש. כיום מסווגת מערכת זו כזוג נראה. (Harpaz, 1995).



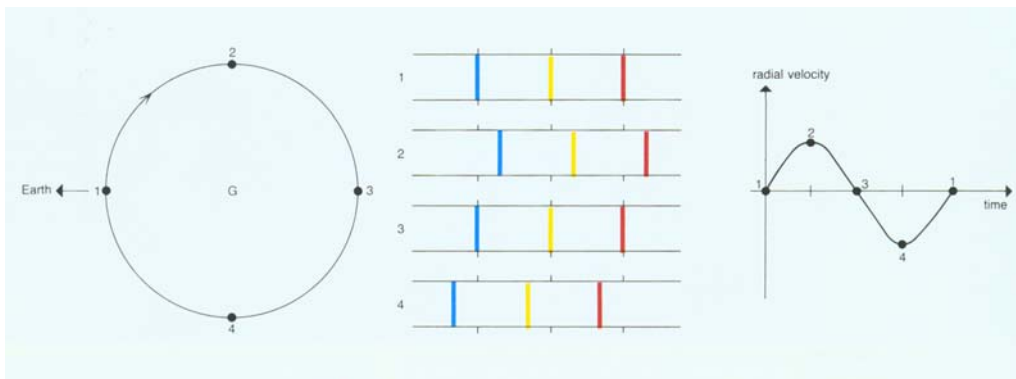
איור 4. דיאגרמת התנועה של סיריוס (Audouze and Israël, 1988).

1.2.4 זוגות ספקטרוסקופיים – זוג כוכבים השייך לקבוצה זו נראה ככוכב בודד. במערכות כאלו בני-הזוג קרובים אחד לשני, או שהמערכת כולה רחוקה מאוד מאתנו כך שלא ניתן להבחין בבני-הזוג בנפרד. אולם, לפי השינויים באפקט דופלר בספקטרום הקווי שלהם, אפשר להבחין בתנועת האחד סביב השני (ראה איורים 5 ו-6).

ניתוח הזזת דופלר בספקטרום כזה מאפשרת חישוב מדויק של מהירותם בתנועה המחזורית, תוך שימוש במשוואה (Goldberg and Scadron, 1981):

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad (1.2.4.1)$$

ומן המהירויות האלו זמן המחזור ניתן לקבל מידע רב ערך כגון המרחק ביניהם. (כאן λ הוא אורך הגל הנמדד, λ_0 הוא אורך הגל הלא מוזז, v_r היא המהירות הרדיאלית, ו- c היא מהירות האור.)

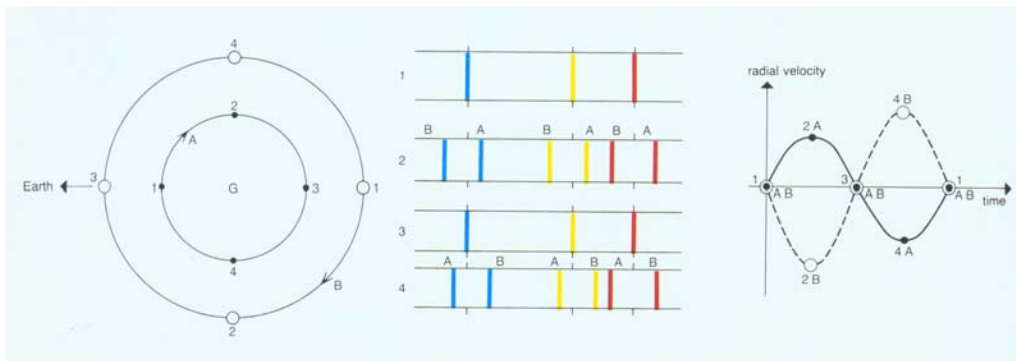


איור 5. השינוי בקווים הספקטראליים הנמדדים כתוצאה מאפקט דופלר (Audouze and Israël, 1988).



איור 6. הקווים הספקטראליים המתקבלים מהכוכב הזוגי HD 6980. שני המרכיבים בו הם מהסוג הספקטראלי G0, קרוב לזה של השמש (G2), ולהם זמן מחזור בן 26 יום ומהירות סיבוב של 48 ק"מ/שנייה. בפס העליון ההפרדה בין הקווים היא מכסימלית בעוד בפס התחתון הקווים מתלכדים. (Audouze and Israël, 1988).

1.2.5 זוגות ספקטראליים – זוהי למעשה תת-קבוצה של הזוגות הספקטרוסקופיים שהצגנו בסעיף הקודם. בתצפיות נראה זוג כזה כאילו הוא כוכב בודד, אולם בניגוד לקבוצה הקודמת (ספקטרוסקופיים) לא ניתן להבחין באפקט דופלר. אולם, בבחינת הספקטרום של המערכת מקבלים קווי בליעה שונים זה מזה המאפיינים שני כוכבים בעלי תכונות ספקטראליות שונות. דוגמא לכך היא מערכת זוגית המכילה כוכב קר וכוכב חם. לכוכבים קרים ספקטרום שונה מזה של כוכבים חמים. אם רואים כי הספקטרום מכיל את הקווים האופייניים לכוכב קר וגם לזה של הכוכב החם, אזי ניתן להסיק כי מדובר במערכת שבה שני כוכבים (ראה איור 7).



איור 7. המחשה כיצד התנועה המחזורית של מערכת כוכבים משפיעה על הספקטרום הנמדד. (Audouze and Israël, 1988).

1.2.6 זוגות לוקים – במקרים מיוחדים מאוד, כאשר קו הראייה אל המערכת כמעט

מתלכד (או מתלכד לגמרי) עם מישור המסילות, ניתן לראות שכוכב אחד מסתיר

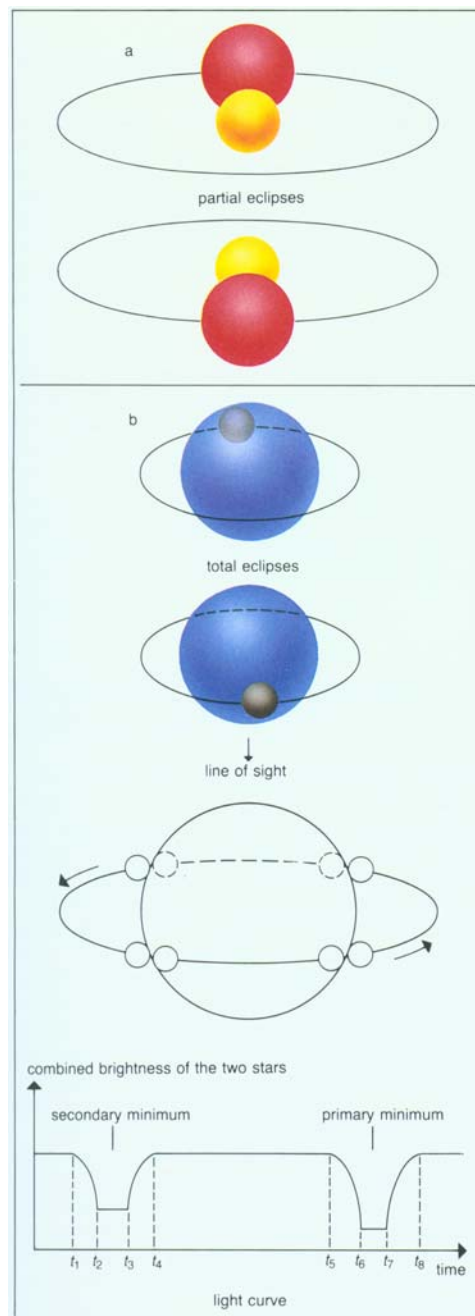
לסירוגין את הכוכב השני. הליקויים ואפקט דופלר הנוצר על-ידי המהירות המסלולית

של הכוכבים, מובחנים היטב במערכות כאלו. במידה וזהו המקרה, רואים ירידה

מחזורית בעוצמת האור הנמדדת מן המערכת (ראה איור 8 - b). ליקויים חלקיים

מובחנים במערכות שמישור המסילות שלהן אינו נמצא לגמרי על קו הראייה שלנו

(ראה איור 8 - a).



איור 8. השינוי בבהירות הנמדדת כתוצאה מהסתרת כוכב אחד על-ידי השני (Audouze and Israël, 1988).

1.3 המכאניקה של מערכת כוכבים זוגית¹

הפיסיקה הבסיסית של מערכת כוכבים זוגית נובעת מן האינטראקציה הגרביטציונית בין רכיבי המערכת. למען פישוט הבעיה בחרנו במערכת כוכבים שבה התנועה היא מעגלית או שהיא אליפטית בעלת אקסצנטריות קטנה מאוד הניתנת לקירוב למעגל, אך הדבר נכון כמובן גם עבור מערכות שבהן לא ניתן לעשות קירוב זה ויש לקחת בחשבון את המסלול האליפטי.

בהתבסס על חוקי ניוטון, אנו יודעים ששני גופים המושכים אחד את השני בכוח הגרביטציה ונעים בתנועה מעגלית מחזורית, יתמידו בתנועתם רק אם הכוח הצנטריפטלי הנוצר תוך כדי הסיבוב יאזן את כוח הגרביטציה. שני הרכיבים במערכת זוגית מסתובבים באותה מהירות סביב מרכז המסה המשותף, והמרחק של כל רכיב נמצא ביחס הפוך למסת הרכיב הזה. כדי לפשט את הבעיה נבחר מערכת צירים שראשיתה במרכז המסה של המערכת הזוגית. מכאן,

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (1.3.1)$$

המספרים 1 ו-2 מייצגים את האינדקסים של שני הרכיבים, m היא המסה ו- r הוא ערכו המוחלט של מרחק הרכיב ממרכז המסה. ממשוואה (1.3.1) נקבל:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (1.3.2)$$

המהירות המסילתית v_1 ניתנת על-ידי $v_1 = r_1 \omega$ כאשר ω היא המהירות הזוויתית. מכיוון שתדירות זו היא אותה תדירות לשני הרכיבים במערכת, יחס המהירויות של

¹ לקוח ברובו מתוך:

הרפז, ע. (1995). התפתחות כוכבים. ספריית פועלים.

שני הכוכבים שווה ליחס מרחקיהם ממרכז המסה. בתנועה מעגלית, הכוח

הצנטריפטלי הפועל על m_1 שווה תמיד לכוח הגרביטציוני הפועל עליה:

$$m_1 r_1 \omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \quad (1.3.3)$$

באופן דומה, ניתן לרשום את המשוואה עבור הרכיב השני:

$$m_2 r_2 \omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \quad (1.3.4)$$

נכפול את משוואה 1.3.3 ב- m_2 ואת משוואה 1.3.4 ב- m_1 , נחבר את שתי

המשוואות ונכפול את התוצאה ב- $D^2 = (r_1 + r_2)^2$. מכאן נקבל:

$$\omega^2 D^3 = G(m_1 + m_2) = GM \quad (1.3.5)$$

כאשר M מייצגת את המסה של המערכת ו- D את המרחק בין שני הרכיבים. משוואה זו היא למעשה החוק השלישי של קפלר. במערכת השמש M הוא למעשה מסת השמש (ניתן להזניח את המסות האחרות) ו- D הוא המרחק של הכוכב ממרכז המסה של המערכת, הנמצאת קרוב למרכז השמש עצמה.

קפלר מצא כי עבור כוכבי הלכת קיים יחס קבוע בין ריבוע המחזור P

($P = \frac{2\pi}{\omega}$) והחזקה השלישית של מרחק כוכב הלכת מן השמש. ממשוואה 1.3.5 אנו

מקבלים את חוק קפלר עבור מערכות כוכבים זוגיות:

$$P = \left(\frac{4\pi^2 D^3}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.6)$$

מחזור הסיבוב הוא לרוב הממצא הברור ביותר המובחן במערכת זוגית. אם המערכת קרובה אלינו כך שניתן להבחין בכל בן זוג בנפרד, אפשר לחשב ממשוואה זו את המסה הכללית של המערכת. אם מישור הסיבוב מקביל לקו הראייה שלנו, נוכל לחשב את המהירות של כל רכיב לפי אפקט דופלר בקרינה המגיעה ממנו. תדירות הסיבוב נצפית ללא תלות במרחק המערכת מאתנו. על-ידי שימוש ביחס $v_1 = r_1 \omega$, אפשר לחשב את המרחק ממרכז המסה של כל אחד מן הרכיבים, וכן את המרחק ביניהם D .

מנתונים אלה אפשר לחשב את המסה הכללית תוך שימוש במשוואה (1.3.6), ומכיוון שיחס המסות של הרכיבים שווה לערך ההפוך של יחס מרחקיהם ממרכז המסה, אפשר לחשב מהי המסה של כל אחד מהרכיבים בנפרד. אם מישור הסיבוב של המערכת אינו מקביל לקו הראייה שלנו, אנו מודדים בעצם את היטלי המהירויות של הכוכבים על קו הראייה. לכן, התצפיות והחישובים נותנים לנו גבול תחתון לערכים של כל המשתנים.

2. רקע מתמטי

הפיתוחים המובאים כאן פורסמו בעבודתם של (Steinitz and Pyper 1970) ויש בהם כדי לתרום משמעותית להבנת המתמטיקה של הבעיה שבה אנו מטפלים בעבודה זו. נקודת המבט הכללית המתקבלת, אף כי אינה ישימה בגלל מגבלות תצפית, מאפשרת להבין טוב יותר את המקרים הפרטיים עבורם כן ניתן לעשות שימוש בנתוני התצפית.

נגדיר את המהירות הסיבובית הנצפית של הכוכב הראשי והמשני במערכת כוכבים זוגית כ- u_1 ו- u_2 בהתאמה. אנו רוצים לתאר את פונקצית התפלגות השכיחות, $F(u_1, u_2)$, של המהירויות הסיבוביות הנצפות כפונקציה של ההתפלגות האמיתית של המהירויות הסיבוביות (v_1 ו- v_2) והתפלגות הזווית (θ) בין ציר הסיבוב העצמי (ספין) של שני הכוכבים. כלומר, אנו רוצים לקבל פונקצית התפלגות חדשה בת שלושה משתנים $G(v_1, v_2, \theta)$.

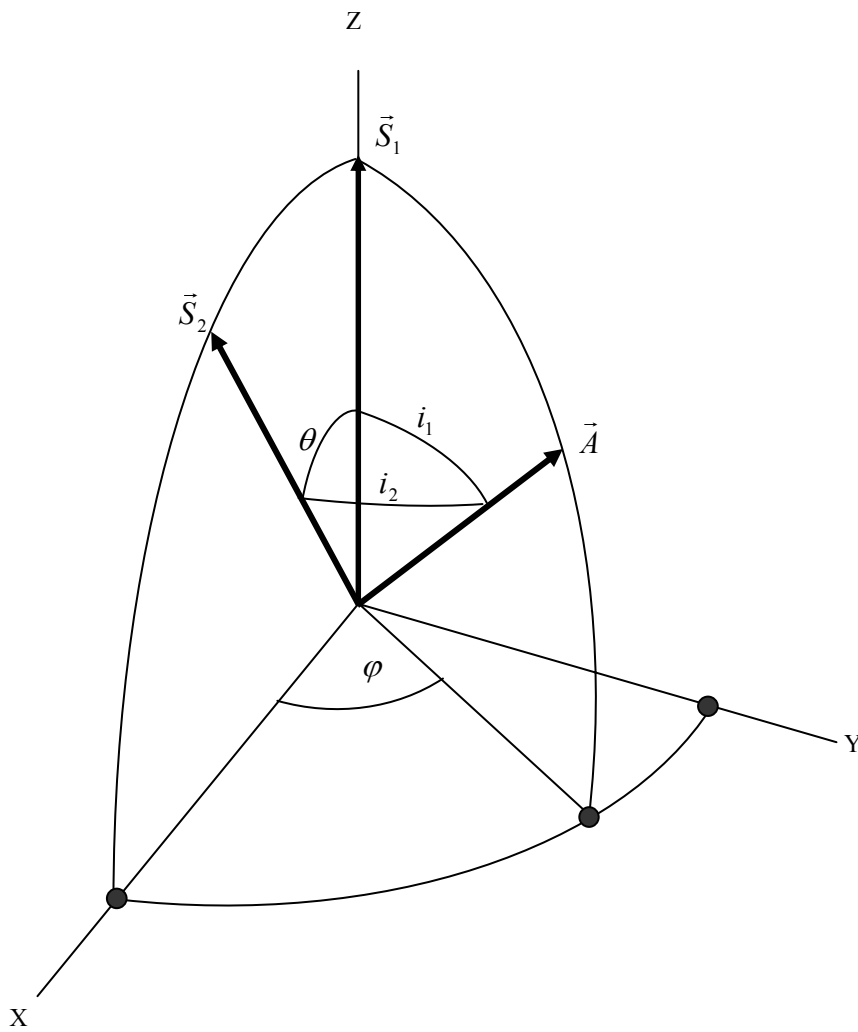
נגדיר את הגדלים הבאים: לכוכב הראשי והמשני קיימים ספינים המאופיינים על-ידי וקטורי יחידה \vec{S}_1 ו- \vec{S}_2 בהתאמה. אנו בוחרים את מערכת הצירים כך ש- \vec{S}_1 נמצא על ציר Z , ו- \vec{S}_2 נמצא על המישור (X, Z) . θ היא הזווית בין שני הספינים \vec{S}_1 ו- \vec{S}_2 . קו הראייה מוגדר על-ידי וקטור היחידה \vec{A} . הזוויות בין \vec{A} לבין \vec{S}_1 ולבין \vec{S}_2 הן i_1 ו- i_2 בהתאמה (ראה איור 9).

מכאן ברור כי:

$$u_1 = v_1 \sin i_1$$

$$u_2 = v_2 \sin i_2$$

φ היא הזווית שבין מישור (X, Z) ובין המישור שעליו נמצאים \vec{S}_1 ו- \vec{A} .



איור 9. הגיאומטריה של מערכת כוכבים זוגית

לצורך הפשטות, נגדיר את המאורע $E[q_1, q_2, \dots, q_r]$ שבו $q_j \in [q_j, q_j + dq_j]$

כאשר $j = 1, 2, \dots, r$

ואת $P(E[q_1, q_2, \dots, q_r])dq_1 dq_2 \dots dq_r$ להיות ההסתברות של E .

במקרה שלפנינו ההסתברות של $E(v_1, v_2, \theta)$ ניתנת על-ידי:

$$G(v_1, v_2, \theta) \sin \theta \, dv_1 dv_2 d\theta$$

כאשר $G(v_1, v_2, \theta)$ הוא פונקציה ההסתברות של $E(v_1, v_2, \theta)$.

עלינו לבדוק שלושה מקרים מיוחדים:

א. ההתפלגות הזוויתית אינה תלויה ב- θ , מכאן:

$$G(v_1, v_2, \theta) = H(v_1, v_2)$$

ב. קיימת תלות ב- θ , אולם ההתפלגות אינה תלויה בהתפלגות המהירויות.
במקרה זה נקבל:

$$G(v_1, v_2, \theta) = H(v_1, v_2)g(\theta)$$

ג. ההתפלגויות של v_1 ו- v_2 אינן תלויות זו בזו, כך ש:

$$G(v_1, v_2, \theta) = f_1(v_1)f_2(v_2)g(\theta)$$

נגדיר את ההסתברות של $E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2]$ על-ידי:

$$D(E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2])dv_1 dv_2 d\theta di_1 di_2$$

מכיוון שהמשתנים i_1, i_2 ו- θ אינם בלתי-תלויים לחלוטין וקביעת שניים מהם תגביל בהכרח את המשתנה השלישי, נחפש דרך שונה להצגת ההסתברות. במטרה להגדיר את $D(v_1, v_2, \theta; i_1, i_1)$ ניקח את $E[v_1, v_2, \theta; i_1, \varphi]$ כיוון ש- i_1, θ ו- φ הם בלתי תלויים. ההסתברות לפיכך ניתנת על-ידי:

$$P(E[v_1, v_2, \theta; i_1, \varphi])dv_1 dv_2 d\theta di_1 d\varphi = NG(v_1, v_2, \theta)\sin\theta \sin i_1 dv_1 dv_2 d\theta di_1 d\varphi$$

כאשר N הוא מקדם נרמול.

באופן כללי (Trumpler and Weaver (1953), טרנספורמציה של צפיפויות הסתברות מסט אחד של משתנים (q_1, \dots, q_r) לסט אחר של משתנים (Q_1, \dots, Q_r) ניתנת על-ידי:

$$P(E[Q_1, \dots, Q_r]) = P(E[q_1, \dots, q_r]) \cdot \left| J \left(\frac{q_1, \dots, q_r}{Q_1, \dots, Q_r} \right) \right|$$

כאשר

היא הדטרמיננטה של מטריצת היעקוביאן של הנגזרות החלקיות של $J \left(\frac{q_1, \dots, q_r}{Q_1, \dots, Q_r} \right)$ ביחס ל- (Q_1, \dots, Q_r) . מכאן,

$$P(E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2]) = P(E[v_1, v_2, \theta; i_1, \varphi]) \cdot \left| J \left(\frac{v_1, v_2, \theta; i_1, \varphi}{v_1, v_2, \theta; i_1, i_2} \right) \right| \quad (2.1)$$

ברור כי

$$J \left(\frac{v_1, v_2, \theta, i_1, \varphi}{v_1, v_2, \theta, i_1, i_2} \right) = J \left(\frac{v_1, v_2}{v_1, v_2} \right) \cdot J \left(\frac{\theta, i_1, \varphi}{\theta, i_1, i_2} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial i_2}$$

מהגיאומטריה של הבעיה (איור 9) נובע כי:

$$\cos i_2 = \cos \theta \cos i_1 + \sin \theta \sin i_1 \cos \varphi \quad (2.2)$$

ומכאן ש:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial i_2} = \frac{\sin \theta \sin i_1 \sin i_2}{\sqrt{Q(\theta, i_1, i_2)}} \quad (2.3)$$

כאשר באופן כללי

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad (2.4)$$

ממשוואות (2.1) ו-(2.3) נובע

$$P(E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2]) = N \cdot G(v_1, v_2, \theta) \frac{\sin \theta \sin i_1 \sin i_2}{\sqrt{Q(\theta, i_1, i_2)}} \quad (2.5)$$

חשוב לציין כי מלבד התלות של $G(v_1, v_2, \theta)$ ב- θ , הביטוי של $P(E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2])$ סימטרי לחלוטין סביב i_1, i_2 ו- θ , כפי שאמור להיות.

נגדיר כעת את $P(E[v_1, v_2, \theta; u_1, u_2])$ במונחים של $E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2]$:

$$P(E[v_1, v_2, \theta; u_1, u_2]) = P(E[v_1, v_2, \theta; i_1, i_2]) \cdot \left| J \left(\frac{v_1, v_2, \theta; i_1, i_2}{v_1, v_2, \theta; u_1, u_2} \right) \right| \quad (2.6)$$

תוצאת החישוב עבור היעקוביאן היא:

$$J \left(\frac{v_1, v_2, \theta; i_1, i_2}{v_1, v_2, \theta; u_1, u_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{(v_1^2 - u_1^2)(v_2^2 - u_2^2)}} \quad (2.7)$$

במטרה לקבל את $F(u_1, u_2)$, הכרחי לבצע אינטגרציה של משוואה (2.6) על v_1, v_2 ו- θ . גבולות האינטגרציה של v_1 ו- v_2 הם מ- u_1 עד ∞ ומ- u_2 עד ∞ , בהתאמה. מאיור 1 ניתן לראות בברור כי $|i_1 - i_2| \leq \theta \leq i_1 + i_2$ עבור כל הערכים של i_1 ו- i_2 . כיוון שאנו מבצעים טרנספורמציה של סט המשתנים $(v_1, v_2, \theta; i_1, i_2) \rightarrow (v_1, v_2, \theta; u_1, u_2)$, צריכים להיות מוצגים על-ידי המשתנים החדשים.

גבולות האינטגרציה על θ ניתנים על-ידי:

$$\Theta_- = \left| \arcsin\left(\frac{u_1}{v_1}\right) - \arcsin\left(\frac{u_2}{v_2}\right) \right| \quad (2.8)$$

$$\Theta_+ = \arcsin\left(\frac{u_1}{v_1}\right) + \arcsin\left(\frac{u_2}{v_2}\right)$$

בהתאם לטרנספורמציה הזאת, יש לרשום את $Q(\theta, i_1, i_2)$ מחדש:

$$Q(\theta, i_1, i_2) = R\left(\theta, \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}\right) \equiv \sin^2 \theta + \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{v_2}\right)^2 + 2 \left\{ \cos \theta \left[\left[1 - (u_1/v_1)^2\right] \left[1 - (u_2/v_2)^2\right]^{1/2} - 1 \right] \right\} \quad (2.9)$$

כעת, לאחר שהגדרנו את המשתנים וגבולות האינטגרציה, ניתן לרשום את

האינטגרל:

(2.10)

$$\frac{F(u_1, u_2)}{u_1 u_2} = N \int_{u_1}^{\infty} \int_{u_2}^{\infty} \int_{\Theta_-}^{\Theta_+} \frac{G(v_1, v_2, \theta)}{v_1 v_2} \times \frac{\sin \theta d\theta dv_1 dv_2}{[R(\theta, u_1/v_1, u_2/v_2)]^{1/2} [(v_1^2 - u_1^2)(v_2^2 - u_2^2)]^{1/2}}$$

כאשר ניקח את מקרה ב' עבור משוואה (2.10) נקבל:

(2.11)

$$\frac{F(u_1, u_2)}{u_1 u_2} = N \int_{u_1}^{\infty} \int_{u_2}^{\infty} \frac{H(v_1, v_2)}{v_1 v_2} \times \left[\int_{\Theta_-}^{\Theta_+} \frac{g(\theta) \sin \theta d\theta}{[R(\theta, u_1/v_1, u_2/v_2)]^{1/2}} \right] \frac{dv_1 dv_2}{[(v_1^2 - u_1^2)(v_2^2 - u_2^2)]^{1/2}}$$

ועבור מקרה ג' נקבל:

(2.12)

$$\frac{F(u_1, u_2)}{u_1 u_2} = N \int_{u_1}^{\infty} \int_{u_2}^{\infty} \frac{f_1(v_1)}{v_1 (v_1^2 - u_1^2)^{1/2}} \cdot \frac{f_2(v_2)}{v_2 (v_2^2 - u_2^2)^{1/2}} \times \left[\int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{g(\theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{R(\theta, u_1/v_1, u_2/v_2)}} \right] dv_1 dv_2$$

ובמקרה המיוחד שבו $g(\theta) \equiv 1$ (מקרה א') נקבל:

$$\int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{\sin \theta d\theta}{[R(\theta, u_1/v_1, u_2/v_2)]^{1/2}} = \left[-\arcsin \left\{ \frac{v_1 v_2}{u_1 u_2} \times \left[\cos \theta - \left(1 - \left(\frac{u_1}{v_1} \right)^2 \right)^{1/2} \left(1 - \left(\frac{u_2}{v_2} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \right]_{\theta_-}^{\theta_+} = \pi \quad (2.13)$$

מכאן ברור כי $N = \pi$.

נניח כי אנו בונים זוגות כוכבים באופן אקראי ממדגם של זוגות בודדים, אזי:

$$\frac{F(u_1, u_2)}{u_1 u_2} = \int_{u_1}^{\infty} \frac{f_1(v_1)}{v_1 (v_1^2 - u_1^2)^{1/2}} dv_1 \cdot \int_{u_2}^{\infty} \frac{f_2(v_2)}{v_2 (v_2^2 - u_2^2)^{1/2}} dv_2 \quad (2.14)$$

,או

$$F(u_1, u_2) = F_1(u_1) \cdot F_2(u_2) \quad (2.15)$$

כפי שהיינו מצפים. כלומר, פונקציית ההתפלגות המשותפת הנצפית היא מכפלת

פונקציות ההתפלגות של הכוכבים הבודדים הנצפים.

אם בין כוכבים במערכת זוגית לא קיים מתאם, אזי $F(u_1, u_2)$ מיוצג על-ידי

משוואה (2.15). מאידך, אם זהו אינו המקרה, אזי בלתי אפשרי להפריד בין המקרה

הכללי ביותר $G(v_1, v_2, \theta)$ ובין מקרה ב' שבו $G(v_1, v_2, \theta) = H(v_1, v_2)g(\theta)$.

3. מדגם המחקר

כאשר Steinitz and Pyper (1970) העריכו את המתאם עבור כוכבים זוגיים נראים, היו ברשותם נתונים על כ – 50 זוגות נראים. לעומת זאת המחקר הנוכחי מתבסס על נתונים אודות 1010 זוגות כוכבים מסוגים שונים: נראים, ספקטרוסקופים, קרובים וכו'. את נתוני המקור לקחנו מקטלוג מהירות הסיבוב של כוכבים (Glebocki, Gnacinski and Stawikowski, 2000) המכיל נתונים על למעלה מ- 17000 כוכבים. לאחר שניפיו את הכוכבים הבודדים, את המערכות המשולשות והמרובעות, הפעלנו בנוסף לכך על הזוגות שנותרו את המגבלות הבאות:

- הסוג הספקטראלי של כל אחד מהחברים בזוג קודם ל – F0. זאת כיוון שהכללת כוכבים איטיים יותר מהסוגים המאוחרים (F0 ואילך) אינה בעלת משמעות וזאת כיוון שבמהירויות איטיות מאוד נקבל ממילא מתאם.
- שני הכוכבים במערכת הזוגית נמצאים על הסדרה הראשית. ענקים וסופר ענקים הוצאו אף הם כיוון שאינם אמורים לשקף את המהירות הסיבובית המקורית שלהם.

א. מדגם אמיתי (RB (Real Binaries) - לאחר התנאים לעיל נותרו 1010 זוגות כוכבים (2020 כוכבים בודדים).

כדי לשלול את האפשרות שקיים מתאם בין היטלי מהירויות הסיבוב של כל זוג כוכבים שנבחנו באקראי, בנינו מדגם נוסף.

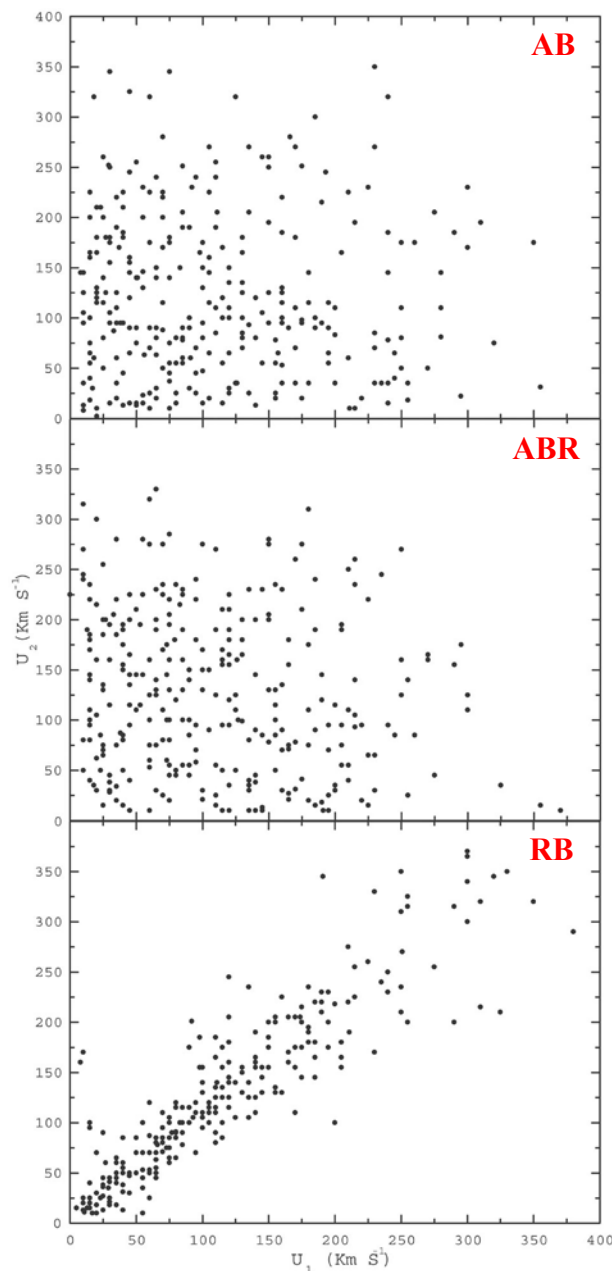
ב. מדגם מלאכותי (AB (Artificial Binaries) – בנינו זוגות מלאכותיים על-ידי הצמדת כל כוכב לכל האחרים וניפוי הזוגות האמיתיים. בסופו של תהליך ההצמדה התקבלו 2038180 מערכות כוכבים זוגיות מלאכותיות.

כיוון שמלכתחילה הוגבלו הסוגים הספקטראליים של הכוכבים במדגם RB, ניתן לחשוך שערבוב הסוגים והגדלת המרווח הספקטראלי בין הכוכבים במערכות המלאכותית שבמדגם AB עשויה להשפיע על מידת המתאם בין היטלי מהירויות הסיבוב. לכן בנינו מדגם נוסף הכולל בתוכו הגבלות חמורות על המרחק הספקטראלי בין רכיבי המערכות.

ג. מדגם מלאכותי מצומצם (ABR (Artificial Binaries, Restricted) – מדגם זה נבנה על בסיס המדגם המלאכותי AB תוך החמרת המגבלות המוטלות על המדגם. התנאי שנדרש מקבוצה זו הוא שהמרחק הספקטראלי בין בני זוג לא יעלה על שתי תת-רמות ספקטראליות. נכתבה תוכנית נוספת שמטרתה למחוק מהמדגם AB את כל זוגות הכוכבים שאינם עומדים בתנאי המוזכר לעיל. בסופו של תהליך האלימינציה הזה נותרו 263344 מערכות כוכבים זוגיות עם המגבלה הנוספת.

4. המחשת התפלגות מהירויות

לצורך התרשמות ראשונית על מתאם אפשרי בין הזוגות בתוך המדגמים שאנו בודקים במחקר זה, שרטטנו את גרף המחשת התפלגות היטלי המהירויות. המחשת התפלגות היטלי המהירויות בוחנת את הקשר שבין היטל מהירות הסיבוב של הכוכב הראשון לבין היטל מהירות הסיבוב של הכוכב השני במערכת זוגית. למעשה לא נערכה כאן אנליזה מתמטית, אולם ניתן להתרשם מן הגרפים על האופן בו מאורגנים זוגות הכוכבים.



גרף 1. המחשה של היטל מהירות הסיבוב של כוכב אחד כנגד מהירות הסיבוב של הכוכב השני במערכת זוגית עבור הקבוצות AB, ABR, ו-RB.

אחרי שהמחשנו בגרף 1 את האפשרות שיש מתאם במדגם האמיתי (RB) ולא בשני האחרים, חישבנו את מקדם המתאם (Correlation Coefficient) של כל אחד משלושת הדגמים, וקיבלנו:

- עבור המדגם המלאכותי AB – מקדם מתאם בשיעור $8.1 \cdot 10^{-6}$.
- עבור המדגם המלאכותי ABR – מקדם מתאם בשיעור $6.8 \cdot 10^{-5}$.
- עבור המדגם האמיתי RB – מקדם מתאם בשיעור 0.8.

נראה ששני מקדמי המתאם הראשונים זניחים, ואילו המתאם עבור המדגם האמיתי (RB) אינו רחוק מהערך 1. רואים אפוא באופן מובהק את המעבר מהמדגמים המלאכותיים AB ו-ABR למדגם האמיתי RB. בפרק הבא נערוך מבחנים כמותיים נוספים כדי לקבל מסקנות מהימנות אודות מידת המתאם בין היטלי מהירויות הסיבוב של בני זוג במערכת זוגית.

5. אנליזה

על מנת לכמת את המתאם בין היטלי מהירויות הסיבוב של כוכבים במערכת זוגית, ערכנו מספר מבחנים לכל אחד מהמדגמים שהוצגו בפרק הקודם (3). כל מבחן כזה בודק היבט אחר של הבעיה. שילוב התוצאות מהמבחנים השונים יאפשר לקבל מסקנות מהימנות.

(א) מבחן ה- Ω - כאן אנו בודקים למעשה את מידת הסנכרון בין שני הרכיבים של מערכת זוגית. מידת הסנכרון תיתן לנו מידע על כמות המערכות הקרובות הנמצאות בתוך המדגם שאנו בודקים.

(ב) פונקציית ההסתברות, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית - על מנת לכמת את התוצאות הנראות בגרף 1, בנינו פונקציית התפלגות דו-ממדית עבור כל אחת מהקבוצות הנבדקות (AB, ABR ו-RB). את התוצאות אנו מציגים בטבלאות שבהן אנו נותנים גם את ההתפלגות השולית וכן את מקדם הרגרסיה הליניארית.

(ג) הצגה גראפית של הרגרסיה הליניארית - כדי לקבל התרשמות גראפית של מקדמי הרגרסיה, שרטטנו שני גרפים עבור כל אחת מן הקבוצות הנבדקות. בסעיף זה ערכנו קירוב ליניארי לגרפים שהתקבלו ובכך קיבלנו היבט נוסף על מידת המתאם.

(ד) מבחן המרווח הספקטראלי - אנו יודעים כי לסוגים שונים של כוכבים מהירויות סיבוב אופייניות שונות. מטרת המבחן היא לבדוק האם קיים מתאם טוב יותר עבור זוגות מסוג ספקטראלי זהה, והאם המתאם הולך ופוחת כאשר המרווח הספקטראלי עולה.

(ה) מבחן השונות המשותפת (covariance) – מבחן זה נותן אינדיקציה למידת אי

התיאום בין משתנים. מבחן זה מספק נקודת מבט שונה על המערכות שאנו

בוחנים ונותן מידע ברור היכן אין מתאם.

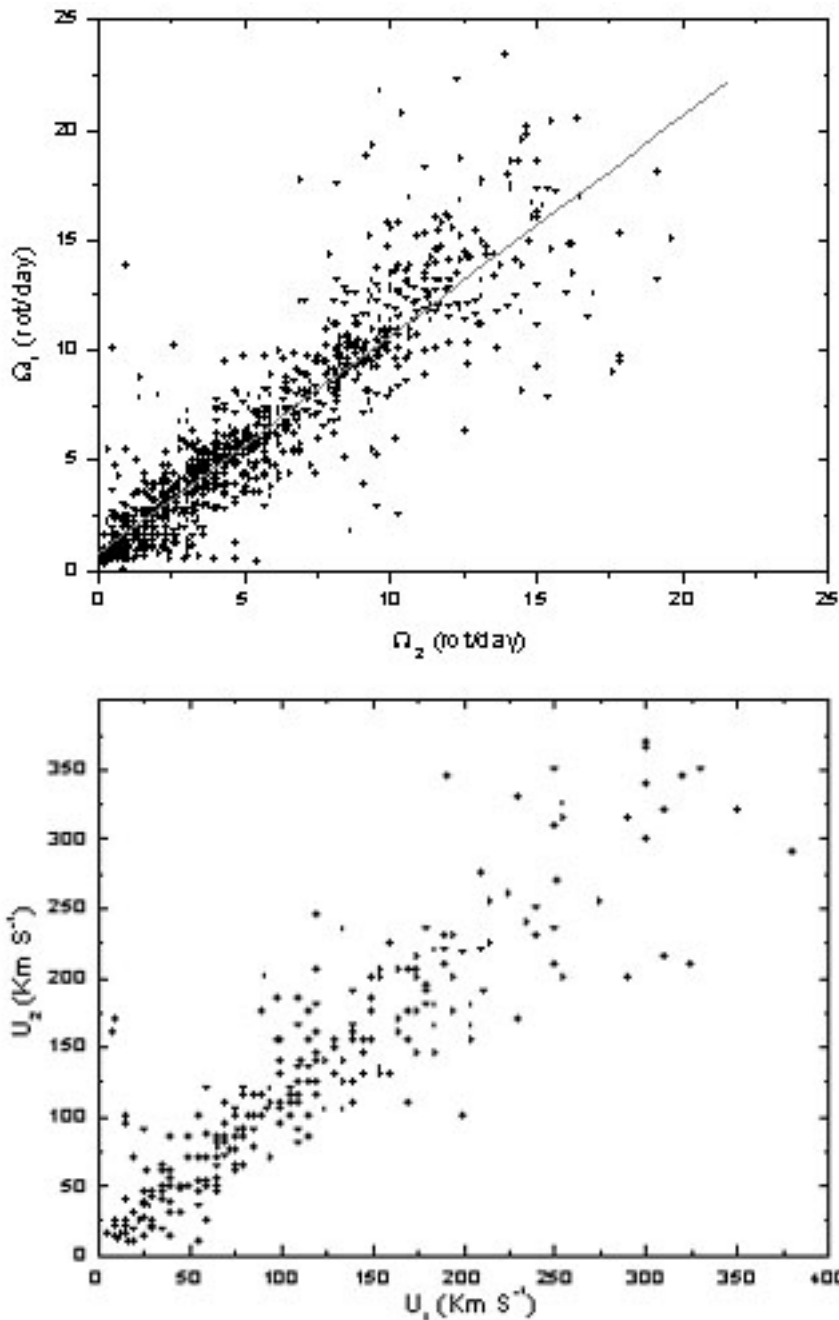
(ו) מבחן הקונבולוציה - הקונבולוציה נותנת מידע אודות מידת החפיפה הקיימת בין

שתי פונקציות התפלגות מהירויות של כוכבים שונים. זהו מבחן חשוב המעיד

על "זיכרון" המהירות הסיבובית שיש לכוכב כאשר הוא נמצא במערכת זוגית.

5.1 מבחן ה- Ω

כפי שראינו בפרק הקודם (4), מצאנו בהמחשת התפלגות המהירויות עבור המדגם האמיתי RB סידור ברור של המערכות. הנקודות בגרף, שכל אחת מהן מייצגת למעשה זוג כוכבים, נראו מרוכזות לאורך האלכסון הראשי. אולם, ככל שהיטלי מהירות הסיבוב נעשו גדולים יותר, הפיזור גדל.

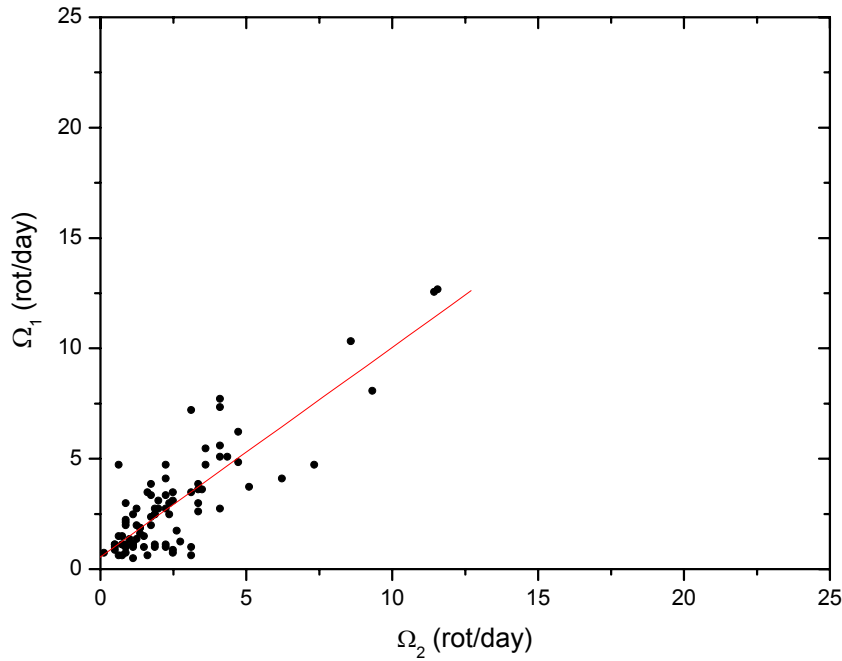


גרף 2 (עליון). היטל המהירות הזוויתית ($\Omega_k := (\omega \sin i)_k$) של הכוכב הראשון לעומת המהירות הזוויתית של הכוכב השני; בהשוואה לגרף 1 (RB) (תחתון).

בחלק מן המערכות שבדקנו קיימים הבדלים ברדיוסים של הכוכבים המרכיבים את המערכת. כדי לבדוק האם הבדלים אלו תורמים לפיזור שראינו בגרף 1(RB) צריך לשרטט גרף של היטל המהירות הזוויתית של כוכב אחד כנגד היטל המהירות הזוויתית של בן זוגו. גרף כזה ייתן תחושה למידת הסנכרון הקיים במדגמים השונים. נקודות המייצגות זוגות שבין הרכיבים שלהם קיים סנכרון יופיעו בגרף זה על האלכסון הראשי.

כדי לקבל את המהירויות הזוויתיות של הכוכבים, ערכנו אינטרפולציה ליניארית על נתוני הרדיוס האופייניים לכל סוג ספקטראלי (Cox, 2000). על ידי חלוקה של היטל מהירות הסיבוב הקווית ברדיוס האופייני וקיבלנו את היטל המהירות הזוויתית. מגרף (2) רואים בבירור כי יש התכנסות של חלק מהמערכות לעבר האלכסון הראשי. אולם התופעה הכללית שבה אנו רואים גידול של הפיזור לאורך האלכסון באזור המהירויות הגבוהות עדיין דומה לזו שנראית בגרף 1(RB). בנוסף, מלבד הזוגות שהנקודות המייצגות אותם נמצאות על האלכסון הראשי עצמו, הנקודות האחרות מעידות על כך שבזוגות הללו אין סנכרון.

המדגם האמיתי (RB) כולל בתוכו סוגים שונים של מערכות זוגיות (ספקטרוסקופיות, נראות, קרובות וכו'). על מנת לבחון האם יש קשר בין הסוג של המערכת ומיקומה על הגרף, שרטטנו גרף עבור היטלי המהירויות הזוויתיות של כ – 100 מערכות שידוע כי הן מערכות ספקטרוסקופיות ולכן מתקבל על הדעת שבני הזוג קרובים זה לזה (ראה סעיף 1.2.4 בפרק המבוא).



גרף 2. המהירות הזוויתית ($\Omega_k := (\omega \sin i)_k$) של כוכב אחד לעומת המהירות הזוויתית של בן זוגו עבור כמה מערכות ספקטרוסקופיות.

פרט לעובדה כי בין המערכות שנבדקו בגרף זה אין כאלו בעלות מהירויות גבוהות מאוד, צורת הגרף מתאימה מאוד לזו שראינו בשני המקרים הקודמים (גרף 2 וגרף 1 (RB)). מכאן ניתן להסיק שלמרות שהמדגם RB מכיל מערכות כוכבים זוגיות מסוגים שונים, מידת הסנכרון בין בני הזוג של המערכות במדגם אינה גבוהה.

5.2 פונקציות ההסתברות, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית

כדי להעריך באופן סטטיסטי את ההסתברות לקשר אפשרי בין שני רכיבים של מערכת זוגית אנו מארגנים בטבלאות את פונקציות ההתפלגות הדו-ממדית (האזור הצבוע אפור בטבלאות 1-3) של המדגמים שהצגנו בסעיפים הקודמים. ניתוח הערכים המופיעים בטבלה כזו עשוי ללמד על קיום או אי-קיום של מתאם בין שני הרכיבים של פונקציות ההתפלגות (במקרה שלנו היטל מהירות הסיבוב של כל אחד מן הכוכבים במערכת זוגית).

בנוסף מוצגת בטבלה ההתפלגות השולית $\phi_i(u_i) = \sum_{j=1}^7 F(u_1(i), u_2(j))$, ורגרסיה

ליניארית של בן זוג כפונקציה של אינטרוול היטל המהירות של בן זוג. את הרגרסיה הליניארית חישבנו כך (הרגרסיה הליניארית משמשת אותנו בסעיף הבא לבניית ההצגה הגראפית):

$$\bar{u}_1(u_2(j)) = \frac{\sum_{i=1}^7 u_1(i)F(u_1(i), u_2(j))}{\sum_{i=1}^7 F(u_1(i), u_2(j))} \quad (5.2.1)$$

$$\bar{u}_2(u_1(i)) = \frac{\sum_{j=1}^7 u_2(j)F(u_1(i), u_2(j))}{\sum_{j=1}^7 F(u_1(i), u_2(j))} \quad (5.2.2)$$

כאן, $u_j(i)$ הוא אינטרוול המהירות ו- $F(u_1(i), u_2(j))$ פונקציות ההתפלגות הדו-ממדית.

טבלה 1. פונקציית ההסתברות הדו-ממדית, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית עבור המדגם המלאכותי AB (כל הערכים בשטח האפור בתוך הטבלה הנם ביחידות של 10^{-4}):

Velocity interval (Km/sec)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	$\phi_2(u_2)$	$\bar{u}_1(u_2)$
0-50	563	525	406	351	200	90	51	0.22	115
50-100	617	575	446	388	221	99	58	0.24	116
100-150	451	420	324	282	161	73	42	0.18	115
150-200	433	404	313	271	155	70	41	0.17	116
200-250	276	260	200	174	99	45	26	0.11	116
250-300	122	115	88	77	44	20	12	0.05	116
300-350	104	99	76	67	39	17	10	0.04	117
$\phi_1(u_1)$	0.26	0.24	0.19	0.16	0.09	0.04	0.02		
$\bar{u}_2(u_1)$	125	126	126	126	126	126	127		

טבלה 2. פונקציית ההסתברות הדו-ממדית, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית עבור המדגם המלאכותי המצומצם ABR (כל הערכים בשטח האפור בתוך הטבלה הנם ביחידות של 10^{-4}):

Velocity interval (Km/sec)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	$\phi_2(u_2)$	$\bar{u}_1(u_2)$
0-50	576	496	385	356	205	105	0	0.21	112
50-100	657	627	466	412	215	94	0	0.25	108
100-150	452	447	331	277	141	56	22	0.17	110
150-200	465	454	335	276	143	57	22	0.18	109
200-250	290	264	201	172	96	45	18	0.11	112
250-300	115	99	80	65	37	19	7	0.04	112
300-350	115	88	74	66	43	25	10	0.04	119
$\phi_1(u_1)$	0.27	0.25	0.19	0.16	0.09	0.04	0.01		
$\bar{u}_2(u_1)$	126	125	126	124	125	125	201		

טבלה 3. פונקציית ההסתברות הדו-ממדית, ההתפלגות השולית ורגרסיה ליניארית עבור המדגם האמיתי RB (כל הערכים בשטח האפור בתוך הטבלה הנם ביחידות של 10^{-4}):

Velocity interval (Km/sec)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	$\phi_2(u_2)$	$\bar{u}_1(u_2)$
0-50	1901	198	20	0	0	0	0	0.21	31
50-100	614	1564	158	40	10	0	0	0.24	68
100-150	40	515	1000	158	0	0	0	0.17	112
150-200	69	79	574	752	158	59	10	0.17	156
200-250	10	50	99	535	347	50	40	0.11	190
250-300	0	0	30	59	228	119	30	0.05	231
300-350	0	10	10	50	129	198	89	0.05	254
$\phi_1(u_1)$	0.26	0.24	0.19	0.16	0.09	0.04	0.02		
$\bar{u}_2(u_1)$	43	89	144	193	242	278	284		

במידה וקיים מתאם בין המשתנים אנו מצפים לראות הבדל משמעותי בין הערכים המופיעים על האלכסון הראשי של הטבלה ובין הערכים המופיעים מעליו ומתחתיו בשאר החלק האפור.

בטבלה 1 ברור כי זהו אינו המצב. אנו רואים כי הערכים המופיעים על האלכסון הראשי של הטבלה אינם נבדלים מהתאים הצמודים אליהם. הדבר מצביע על כך שאין מתאם בין היטל המהירות הסיבובית של כוכב אחד לבין זה של השני.

חיזוק לכך ניתן לראות בתוצאות הרגרסיה של היטל המהירות הסיבובית של רכיב אחד של המערכת כנגד אינטרוול מהירות של הרכיב השני. אנו רואים בצורה ברורה לחלוטין כי אין למעשה הבדל בערכים שמתקבלים עבור הרגרסיה. משמעות הדבר היא שעם עליית מהירות הסיבוב של כוכב אחד, אין בממוצע שום שינוי במהירות הסיבוב של הכוכב השני. היינו מצפים לראות שינוי כלשהו אילו היה קיים מתאם.

לאור התוצאות שהסקנו מהטבלה, אנו למדים כי עבור קבוצת זוגות הכוכבים המלאכותית AB אין מתאם בין מהירות הסיבוב של כוכב אחד במערכת זוגית ובין מהירות הסיבוב של הכוכב השני במערכת.

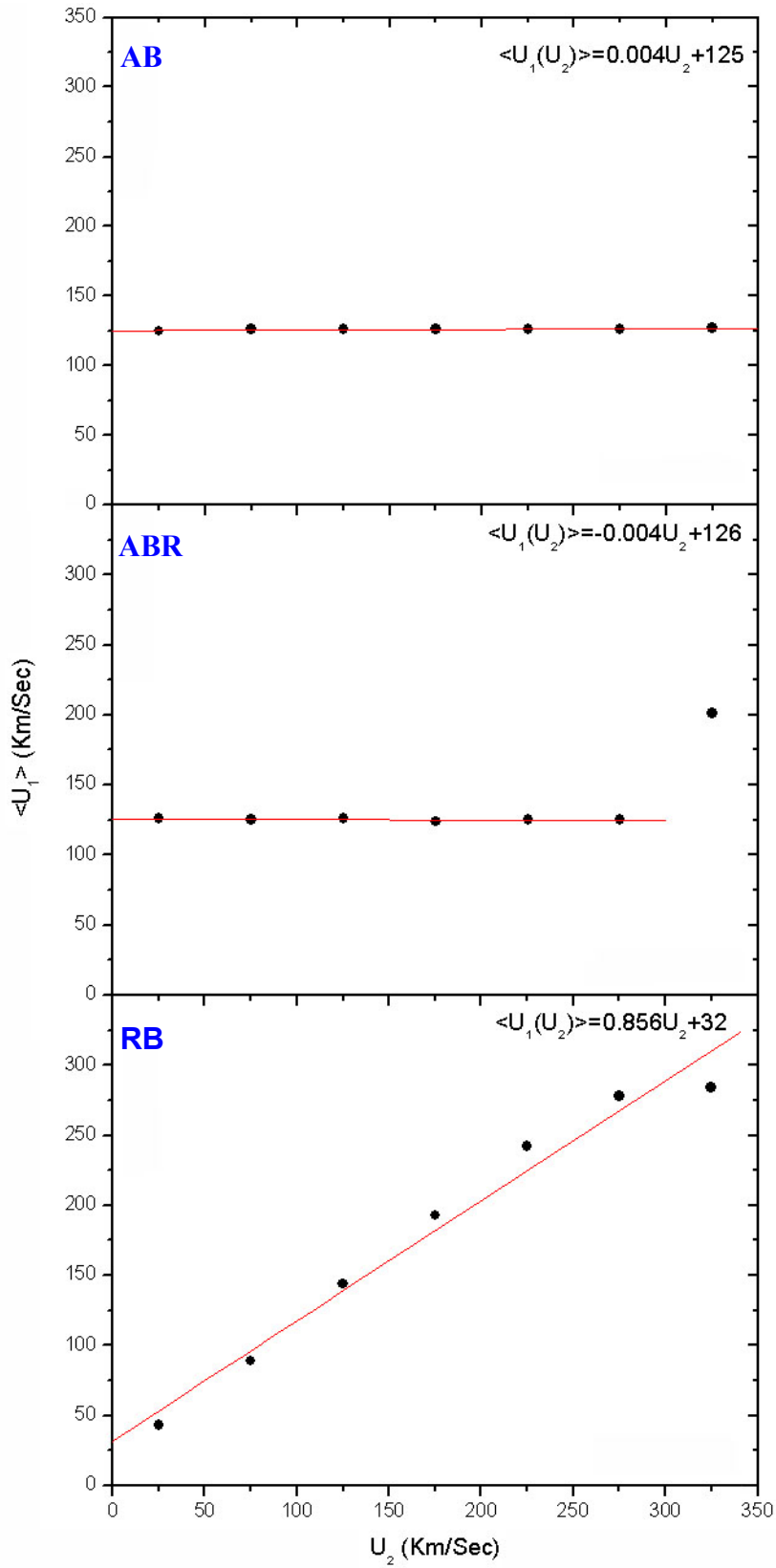
ניתן אולי לשייך את חוסר המתאם שקיבלנו בטבלה 1 להפרשים האקראיים בין הסוגים הספקטראליים של בני הזוג במערכות המלאכותיות שהרכבנו. על מנת לבחון את האפשרות הזאת, בנינו עוד טבלה דומה לקודמת עבור הקבוצה המלאכותית ABR (טבלה 2). אם אכן חוסר המתאם שקיבלנו בטבלה 1 הוא רק תוצאה של הפרשים האקראיים בין הסוגים הספקטראליים של בני הזוג, הרי שצמצום מרחק זה יגדיל את המתאם האמפירי. כמו כן אנו מצפים לראות שינוי בתוצאות הרגרסיה, ובכל-מקרה, אנו מצפים לראות הבדלים משמעותיים מאלו שקיבלנו עבור המדגם המלאכותי AB.

מטבלה 2 ברור כי גם במקרה של מדגם מלאכותי ABR אין זכר למתאם. אין הבדלים בין האלכסון הראשי לבין אלו הנמצאים בשאר החלק האפור של הטבלה. גם הערכים המקבלים עבור הרגרסיה ממחישים שלמעשה לא קיימת תלות בין שני היטלי מהירויות הסיבוב של הכוכבים. יתרה מכך, הערכים המתקבלים דומים מאוד לאלו שקיבלנו עבור המדגם הקודם. מכאן שהנחה כי חוסר המתאם שמצאנו עבור המדגם המלאכותי AB תלויה במרחק הספקטראלי שבין בני הזוג ניתנת לסילוק. לאחר שפסלנו את האפשרות כי בין זוגות כוכבים שנבנו באקראי תתכן התאמה במהירויות הסיבוב העצמיות, ולאחר שהראנו כי הסיבה לכך שאין מתאם אין מקורה במרחק הספקטראלי של הכוכבים במערכת זוגית, נותר לבדוק מה קורה בזוגות האמיתיים.

כאן, בטבלת הזוגות האמיתיים RB (טבלה 3), אין מקום לספק באשר להבדל שבין ערכי האלכסון הראשי ובין שאר רכיבי החלק האפור של הטבלה. עיקר זוגות הכוכבים מרוכזים סביב האלכסון הראשי וככל שמתרחקים ממנו מקבלים ערכים הולכים וקטנים.

ערכי הרגרסיה ממחישים בברור שככל שעולים בהיטל מהירות הסיבוב העצמי של כוכב אחד, עולה בהתמדה היטל מהירות הסיבוב העצמי של הכוכב השני. הדבר נכון הן לגבי הכוכב הראשי לעומת המשני והן לכוכב המשני לעומת הראשי. המסקנה אפוא היא קיום של מתאם ברור בין היטלי מהירויות הסיבוב של בני הזוג במערכת זוגית אמיתית.

5.3 הצגה גראפית של הרגרסיה הליניארית



וב הממוצעת של הכוכב הראשי כפונקציה של אינטרוול היטל גרף 3 -
מהירות הסיבוב של הכוכב המשני במדגם המלאכותי AB (למעלה), ABR (באמצע) ו-RB (למטה).

על מנת להמחיש חזותית את הרגרסיה הליניארית שרטטנו שני גרפים עבור כל אחת מהקבוצות הנבדקות; גרף הרגרסיה עבור היטל מהירות הסיבוב הממוצעת של הכוכב הראשי (הכוכב הבהיר מוגדר באופן שרירותי ככוכב ראשי) כפונקציה של אינטרוול היטל מהירות הסיבוב של הכוכב המשני, וכן גרף הרגרסיה כאשר החלפנו את תפקיד הכוכב הראשי והמשני.

מגרף 3 (AB) עולה בברור כי אין למעשה מתאם בין היטלי המהירויות של הרכיבים במערכות הכוכבים ממדגם AB. ההתאמה הליניארית מראה שיפוע זניח. ניתן להניח שאילו מרחב המדגם היה גדול יותר היינו מקבלים ערך קטן אפילו יותר. הוספנו ובדקנו את ההתאמה הליניארית של הכוכב המשני לעומת אינטרוול המהירות של הכוכב הראשי.

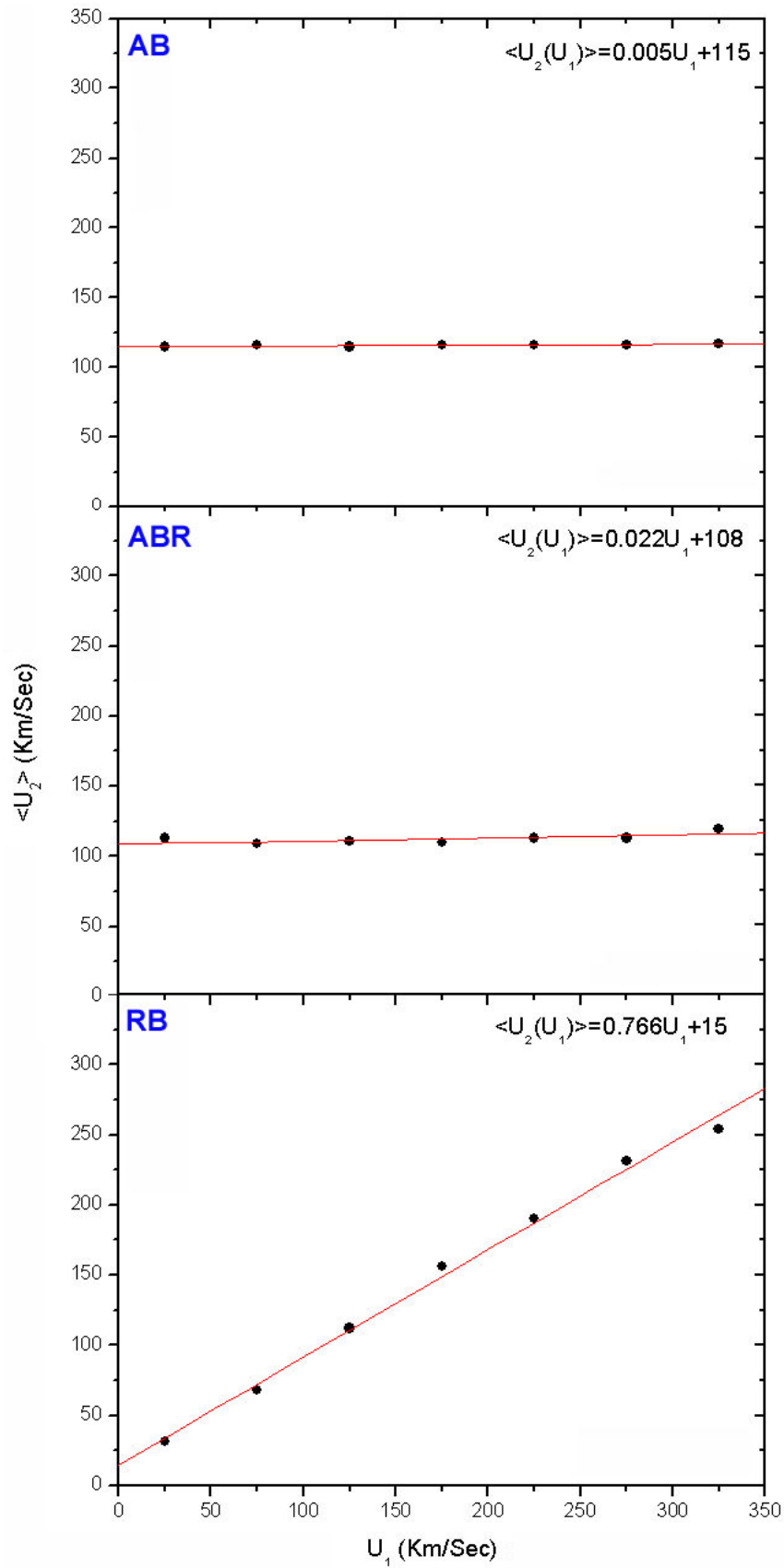
להוציא את הנקודה האחרונה (הימנית ביותר) בגרף 3 (ABR) אנו מוצאים כי למעשה אין מתאם. הנקודה האחרונה מייצגת מספר קטן מאוד של מערכות כוכבים (מעט כוכבים הינם בעלי היטל מהירות סיבוב מסדר גודל של 350 Km/Sec) ועל כן משקלה בגרף נמוך מאוד והוצאתה מהחישובים כמעט ואינה משפיעה על ההתנהגות הכללית.

גם בקבוצה זו, כפי שערכנו לקבוצה הקודמת, בנינו גרף המתאר את הרגרסיה הליניארית של הכוכב המשני לעומת אינטרוול זמן של הכוכב הראשי. הפעם, בניגוד לתוצאות שראינו עבור הקבוצה המלאכותית AB קיים הבדל (קטן אמנם) בין הגרף של הכוכב הראשי לעומת אינטרוול הזמן של המשני ובין הגרף של הכוכב המשני לעומת אינטרוול הזמן של הכוכב הראשי.

בגרף 3 (RB), בניגוד גמור לתוצאות שקיבלנו עבור המדגמים המלאכותיים (AB והמצומצם ABR), אנו רואים קשר ברור בין הארגומנטים שבגרף. אם נזניח את הנקודה האחרונה (הימנית ביותר), מאותו הטעם בדיוק שלא הבאנו אותה בחשבון בגרף 3 (ABR), נקבל עבור ההתאמה הליניארית את התוצאה החשובה:

$$\langle u_1(u_2) \rangle = 0.962u_2 + 20$$

התוצאה ממחישה בברור את התוצאות שקיבלנו ממבחן טבלאות ההסתברות.
כאן אנו מקבלים התאמה ליניארית ברורה הממחישה עד כמה חד וברור המתאם בין
היטלי מהירויות הסיבוב של כוכבים במערכות זוגיות אמיתיות.
נותר איפוא לבדוק את התנהגות הכוכב המשני לעומת אינטרוול מהירות של
הכוכב הראשי.



גרף 4 - רגרסיה ליניארית של היטל מהירות הסיבוב הממוצעת של הכוכב המשני כפונקציה של אינטרוול היטל מהירות הסיבוב הראשי במדגם המלאכותי AB (למעלה), ABR (באמצע) ו-RB (למטה).

גם בגרף 4 (AB), כמו בגרף 3 (AB), אין למעשה קשר בין המשתנים. שוב אנו מקבלים ערך עבור ההתאמה הליניארית שהינו זניח לחלוטין. נראה אפוא כי אין משמעות מעשית במקרה של קבוצת הכוכבים AB מיהו הכוכב הראשי ומיהו המשני במערכת הזוגית.

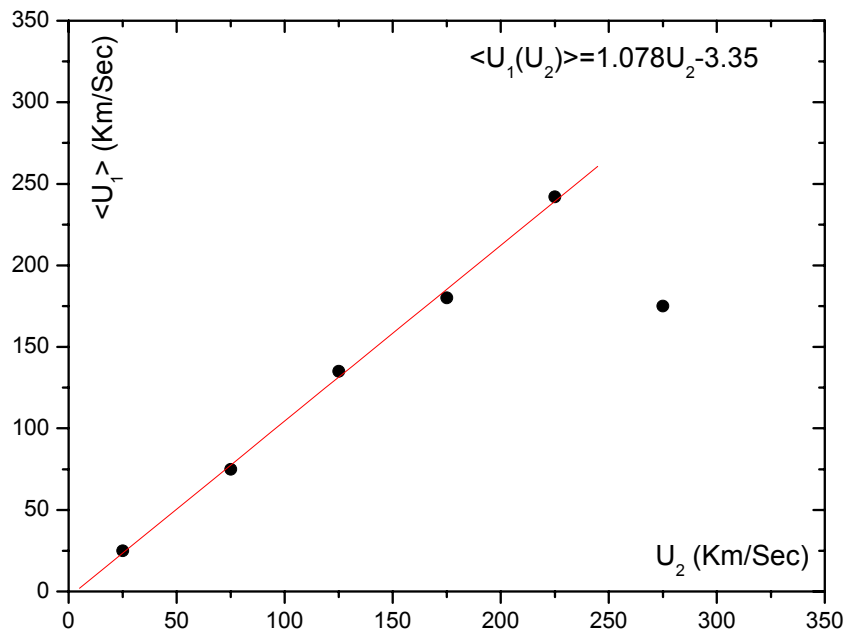
גם בחלק זה של האנליזה, בנינו גרפים עבור הקבוצה המלאכותית ABR מתוך כוונה לשלול את האפשרות שחוסר המתאם אינו תוצאה של מרווח ספקטראלי גדול מזה הקיים בטבע.

מגרף 4 (ABR) עולה כי למעשה גם במקרה זה אין מתאם. ההבדל בערך המתקבל עבור ההתאמה הליניארית ניתן להסבר על-ידי העובדה כי המדגם המלאכותי המצומצם ABR קטן באופן משמעותי מהמדגם המלאכותי AB ומכאן שטווח הסטייה הסטטיסטית גדול יותר. גם במקרה זה ניתן להניח כי אילו היה המדגם המלאכותי המצומצם ABR גדול יותר היינו מקבלים שיפוע שטוח לחלוטין (שזה בקירוב טוב מה שקיבלנו בגרפים 3 (AB), 3 (ABR), 4 (AB) ו- 4 (ABR)).

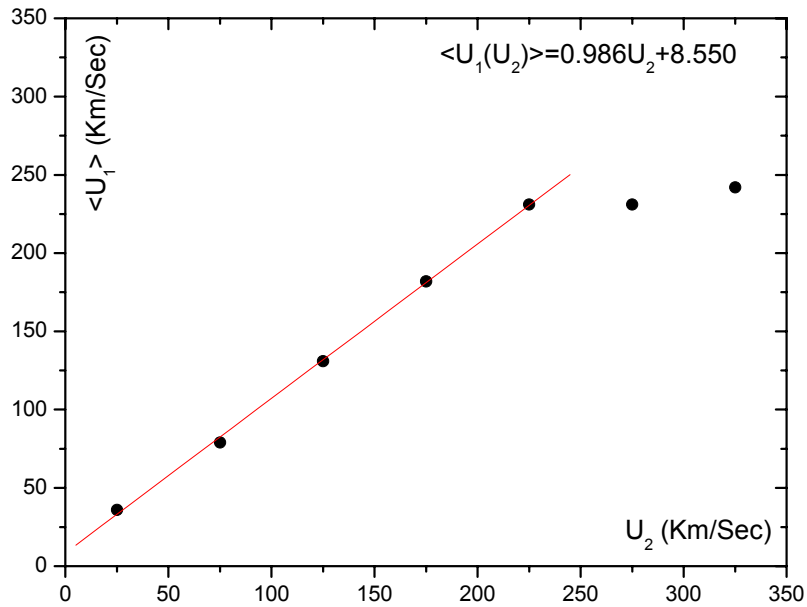
בגרף 4 (RB) קיבלנו התאמה ליניארית טובה מאוד, אמנם בעלת שיפוע נמוך מזה שקיבלנו בגרף 3 (RB) אך אין ספק שמידת המתאם במקרה זה גבוהה ביותר. את התופעה הזאת ראינו גם במחקרים קודמים דוגמת אלו של (Steinitz, 1970) and Pyper (1974, Levato).

5.4 מבחן המרווח הספקטראלי

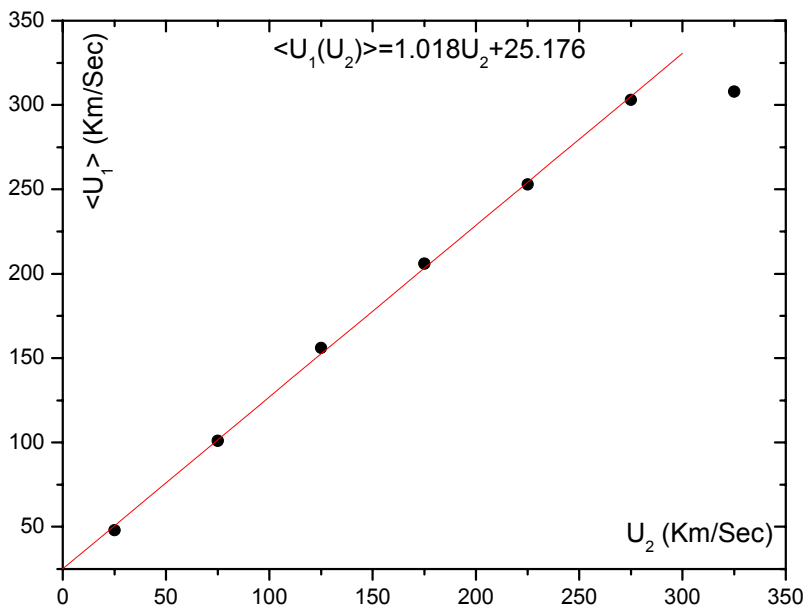
בסעיף הקודם הראנו כי עבור הקבוצות המלאכותיות לא הייתה משמעות נראית למרווח הספקטראלי בין בני הזוג. על מנת לבדוק האם יש השפעה של המרחק הספקטראלי בין בני זוג על מקדם הרגרסיה הליניארית הגדרנו שלוש תת-קבוצות מקבוצת הכוכבים האמיתית RB בעלות מרחקים ספקטראליים של 1,0 ו- 2 תת רמות. עבור כל אחת מן הקבוצות חישבנו גרף רגרסיה ליניארית של הכוכב הראשי לעומת אינטרוול מהירות של הכוכב המשני.



גרף 5א – רגרסיה ליניארית של היטל מהירות הסיבוב הממוצעת של הכוכב הראשי לעומת אינטרוול היטל מהירות הסיבוב של הכוכב המשני בתת קבוצת הזוגות האמיתיים שבהם המרווח הספקטראלי בין בני הזוג הוא שתי תת רמות.



גרף 5ב – רגרסיה ליניארית של היטל מהירות הסיבוב הממוצעת של הכוכב הראשי לעומת אינטרוול היטל מהירות הסיבוב של הכוכב המשני בתת קבוצת הזוגות האמיתיים שבהם המרווח הספקטראלי בין בני הזוג הוא תת רמה אחת.



גרף 5ג – רגרסיה ליניארית של היטל מהירות הסיבוב הממוצעת של הכוכב הראשי לעומת אינטרוול היטל מהירות הסיבוב של הכוכב המשני בתת קבוצת הזוגות האמיתיים שבהם אין הבדל בסוג הספקטראלי של בני הזוג.

בשלושת הגרפים האחרונים (5א, 5ב ו- 5ג) מתקבלת התאמה ליניארית הקרובה מאוד לערך 1, ובטווח השגיאה התוצאה כמעט זהה עבור שלושת הגרפים. הנקודה האחרונה מייצגת מספר קטן של זוגות כוכבים (מעט כוכבים הינם בעלי היטל מהירות מסדר גודל של 350 Km/Sec) ועל כן משקלה בגרף נמוך מאוד והוצאתה כמעט ואינה משפיעה על ההתנהגות הכללית (מאותו הטעם הוצאנו את שתי הנקודות האחרונות בגרף 5ב).

מההבדל הזניח שהתקבל עבור הקבוצות השונות לא ניתן להסיק שיש קשר בין המרווח הספקטראלי ומידת הקורלציה בין היטלי מהירות הסיבוב של הכוכבים. לא מצאנו טעם לבנות גרפים נוספים עבור תת קבוצות שבהן המרווח הספקטראלי שבין שני בני הזוג גדול משתי תת-רמות, משום שכמות הזוגות בקבוצות אלו אינה מאפשרת חישוב משמעותי.

5.5 מבחן השונות המשותפת (קוואריאנס)

כפי שראינו בפרק 2, כאשר שני משתנים אינם תלויים זה בזה ההתפלגות הדו-ממדית המשותפת שלהם היא מכפלת פונקציית ההתפלגות החד-ממדית של כל אחד מהם בנפרד (משוואה 2.15):

$$F(u_1, u_2) = f_1(u_1) \cdot f_2(u_2)$$

אם מאידך, קיים מתאם, אזי השונות המשותפת (covariance):

$$\Delta(u_1, u_2) = F(u_1, u_2) - \phi(u_1)\phi(u_2) \quad (5.5.1)$$

אינה בהכרח מתאפסת (כאן $\phi(u_i)$ היא ההתפלגות השולית).

יתרה מכך, כאשר $\Delta(u_1, u_2) = 0$, אזי ברור כי u_1, u_2 הם משתנים בלתי-מתואמים. נדגיש כי ההפך אינו בהכרח נכון, כלומר $\Delta(u_1, u_2) \neq 0$ אינו מצביע בהכרח על כך ש- u_1, u_2 הם משתנים מתואמים (מרצבך ושמרון, 1993). מכאן שיש משמעות לבחינה של השונות המשותפת עבור המדגמים השונים, כיוון שזו מספקת מידע עבור המשתנים שעבורם אין מתאם.

ערכנו טבלת הפרשים (קוואריאנס) עבור כל אחת מן הקבוצות שהצגנו בסעיף הקודם. בחינה של הטבלה עשויה לספק מידע חיוני אודות הקשר שבין שני המשתנים (היטלי מהירויות הסיבוב).

טבלה 4. ערכי הקוואריאנס עבור המדגם המלאכותי AB. כל הערכים בתוך הטבלה הנם ביחידות של 10^{-5} .

Velocities interval (Km/sec)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
0-50	20	4	9	-8	-11	-2	-12
50-100	2	-14	4	11	-1	0	-2
100-150	19	1	-8	-5	-3	0	-3
150-200	1	-3	3	-8	2	0	4
200-250	-14	6	-2	4	1	1	4
250-300	-8	2	-2	3	3	-2	3
300-350	-19	4	-4	4	9	2	5

טבלה 5. ערכי הקוואריאנס עבור המדגם המלאכותי המצומצם ABR. כל הערכים בתוך הטבלה הנם ביחידות של 10^{-5} .

Velocities interval (Km/sec)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
0-50	93	-300	-121	109	183	203	-167
50-100	-25	153	36	108	-24	-52	-196
100-150	-90	197	77	-31	-108	-128	83
150-200	-25	206	71	-84	-110	-135	77
200-250	-1	-45	-21	-46	1	15	97
250-300	24	-54	7	-32	2	17	36
300-350	24	-157	-49	-26	57	81	70

טבלה 6. ערכי הקוואריאנס עבור המדגם האמיתי RB. כל הערכים בתוך הטבלה הנם ביחידות של 10^{-5} .

Velocities interval (Km/sec)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
0-50	13430	-3139	-3809	-3378	-1846	-902	-357
50-100	-146	9879	-2928	-3408	-1980	-1016	-402
100-150	-4115	1010	6761	-1146	-1492	-729	-288
150-200	-3792	-3322	2522	4810	100	-131	-188
200-250	-2874	-2232	-1144	3547	2482	15	206
250-300	-1226	-1124	-583	-148	1872	990	219
300-350	-1278	-1073	-818	-278	864	1774	809

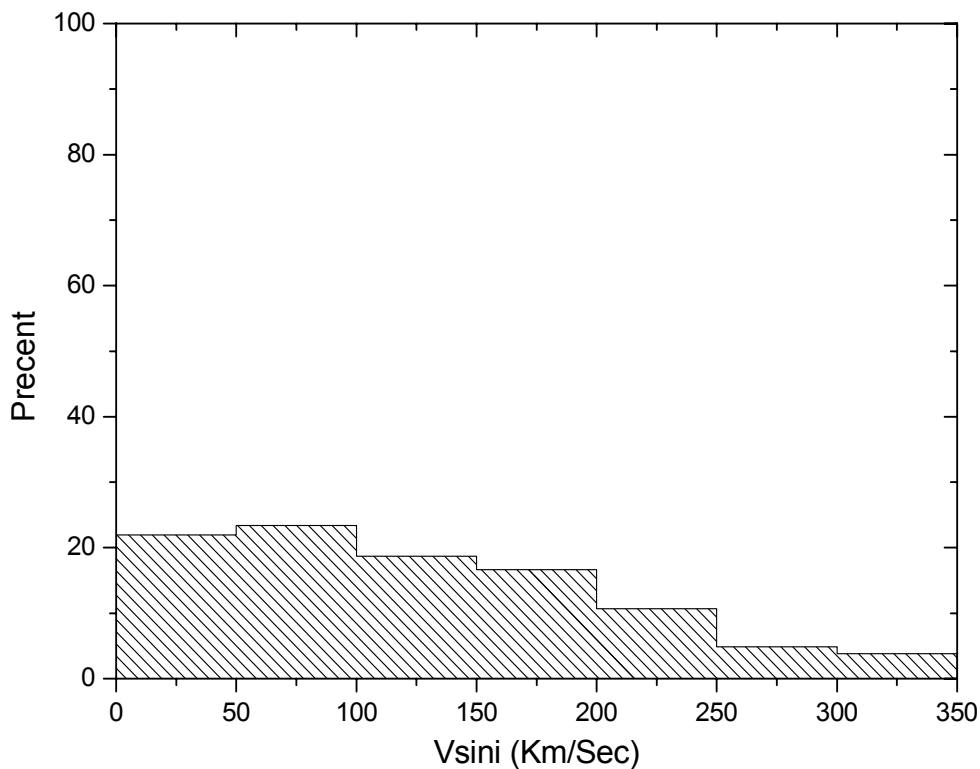
מטבלה 4 אין אנו למדים על שוני כלשהו בין הערכים הנמצאים על האלכסון הראשי של הטבלה ובין יתר הערכים. בנוסף, אין סדר כלשהו בין הערכים החיוביים לבין הערכים השליליים וכן אין ריכוז כלשהו של הערכים הגדולים יותר. גודלם של הערכים הינו זניח וקרוב מאוד לאפס. מכאן עולה בבירור שאין שום התאמה בין היטלי מהירויות הסיבוב.

כמו במקרה הקודם, גם בטבלה 5 אין אנו מוצאים הבדל כלשהו בין הערכים על האלכסון הראשי ובין האחרים. גם עבור הקבוצה המלאכותית ABR אין אנו מבחינים במיקום שונה של הערכים השליליים ובין אלו של החיוביים וגם כאן הערכיים שאנו מקבלים הנם קטנים מאוד וקרובים לאפס.

בטבלה 6. תיחמנו בקו את כל הערכים החיוביים. כאן אנו רואים תבנית שבה הערכים החיוביים מתרכזים לאורך האלכסון. נוסף על כך, בניגוד לטבלאות 4 ו- 5 שנבנו עבור המדגמים המלאכותיים, כאן אנו מקבלים ערכים גבוהים יחסית. לא ניתן להסיק ממבחן זה כי במדגם האמיתי RB יש מתאם, אולם אנו רואים הבדל ברור ומשמעותי מהמדגמים האחרים שעבורם ניתן לומר בבירור כי אין מתאם כלל.

5.6 מבחן הקונבולוציה

קונבולוציה הינה פונקציה הנותנת מידע על מידת החפיפה בין שתי פונקציות שונות, המוזזות זו ביחס לזו. למעשה, הקונבולוציה "מערבבת" בין שתי פונקציות. במקרה של המחקר הנוכחי, הקונבולוציה נותנת לנו מידע אודות מידת החפיפה הקיימת בין שתי פונקציות התפלגות המהירויות של כוכבים שונים. על מנת להבין את התוצאות שאנו מקבלים במבחן הקונבולוציה, אנו בודקים קודם את התפלגות המהירויות הסיבוב של הכוכבים הבודדים במדגמים שבדקנו (גרף 6).



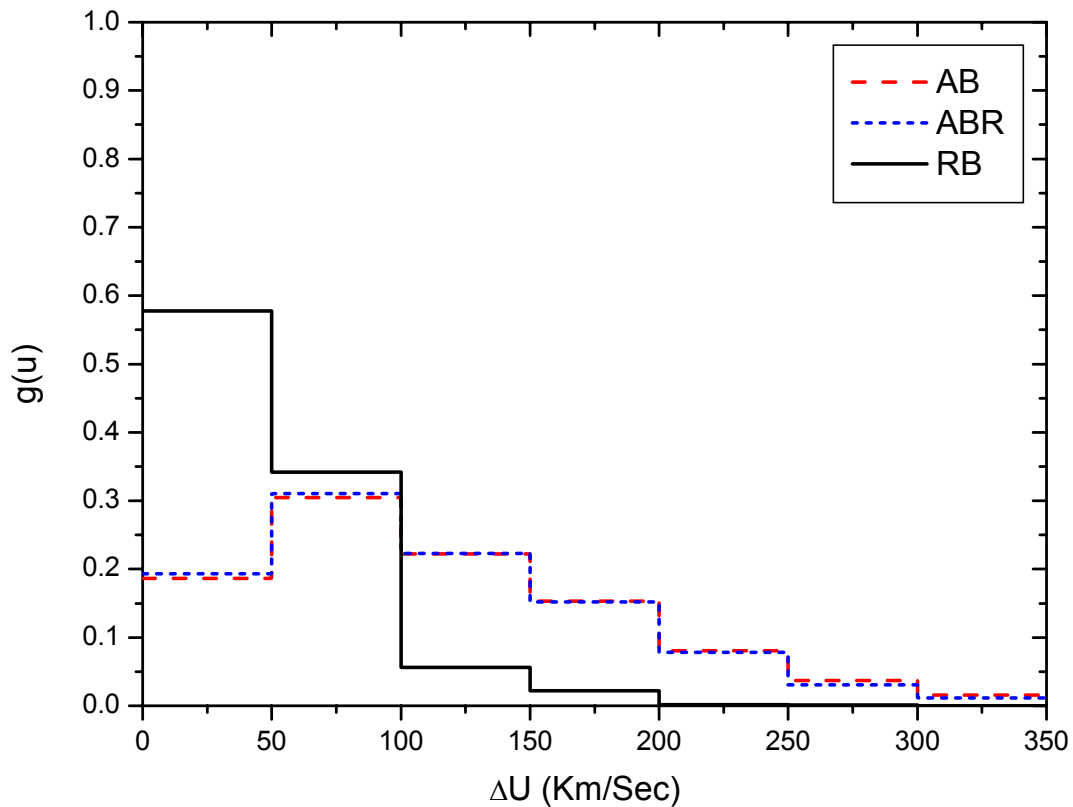
גרף 6. התפלגות המהירויות של הכוכבים הבודדים.

מגרף 6. עולה כי התפלגות המהירויות היא פונקצית מדרגות יורדת בעלת פסגה עבור המהירויות שבין 50 ק"מ/שנייה לבין 100 ק"מ/שנייה. לכן, עבור פונקציות הקונבולוציה, אנו מצפים למצוא התנהגות דומה, אם כי אנו מצפים להפרשים בולטים

יותר בין המדרגות של הפונקציה, ובעיקר לחידוד הפסגה עבור המהירויות שבין 50 ק"מ/שנייה לבין 100 ק"מ/שנייה.

את הקונבולוציה אנו מחשבים על-ידי סכימה של הכפלת ההסתברות של כל כוכב להיות בעל מהירות מסוימת, בהסתברות שהפרש המהירויות בינו ובין הכוכב השני במערכת יהיה בעל ערך מסוים. כיוון שאנו עוסקים באינטרוולי מהירות בדידים, אנו רושמים את הנוסחה עבור הקונבולוציה בעזרת סכום ולא אינטגרל.

$$g(u) = \int P(v-u|v)dv \Rightarrow \sum_v F(v-u, v) \quad (5.6.1)$$



גרף 7. קונבולוציה עבור המדגמים המלאכותיים AB ו-ABR, ועבור המדגם האמיתי RB.

מגרף 7 עולה בברור כי אין הבדל משמעותי בין שני המדגמים המלאכותיים (AB ו- ABR). צורת הגרף מזכירה מאוד את זו של גרף 6. זו כמובן אינה תוצאה מפתיעה משום שלתוצאה זו אנו מצפים במקרה בו אין מתאם בין הפונקציות המוכפלות.

עבור המדגם האמיתי RB אנו רואים פסגה ברורה באינטרוול הראשון (0-50 ק"מ/שנייה) ופסגה קטנה בהרבה באינטרוול המהירות השני (50-100 ק"מ/שנייה). מהאינטרוול השלישי ואילך הפונקציה הולכת ומתאפסת. תמונה זו שונה בתכלית מזו שראינו עבור המדגמים המלאכותיים. התוצאה מראה כי עבור מרחקי מהירות קטנים מכפלת הפונקציות נותנת ערך גבוה, ולהיפך. המשמעות היא שיש העדפת הפרש מהירויות קטן בין בני זוג אמיתיים.

6. מסקנות

עסקנו בקיום מתאם בין היטלי המהירויות הסיבוביות של כוכבים הנמצאים במערכת זוגית. כפי שראינו בפרק האנליזה, על מבחניו השונים, קיום של מתאם כזה נראה ברור מאוד. נשאלת אפוא השאלה, האם יש ביכולתנו לומר משהו אודות מידת המתאם בין כיווני צירי הסיבוב העצמי של כוכבים המהווים חלק ממערכת זוגית. ניתן לתאר את המתאם שקיבלנו בערך כך:

$$v_1 \sin i_1 \cong v_2 \sin i_2 \quad (6.1)$$

ניתן להבין את הביטוי האחרון (6.1) באופן הבא:

$v_1 \gg v_2$ (או $v_1 \ll v_2$) ובו זמנית $\sin i_1 \ll \sin i_2$ (או $\sin i_1 \gg \sin i_2$ בהתאמה). כלומר, ניתן לחשוב על מקרה שבו כוכב אחד בתוך מערכת זוגית מסתובב מהר יותר מאשר הכוכב השני וזווית הנטייה שלו ביחס למישור הסיבוב של המערכת קטנה מזו של הכוכב האיטי. במקרה כזה המנה של סינוסי זוויות הנטייה של הכוכבים במערכת ($\sin i$) פרופורציונית הפוכה למנת המהירויות הסיבוביות שלהם ולכן נמדוד היטל מהירות סיבובית דומה עבור שני הכוכבים. ברור כי תוצאה שכזו אינה מצביעה על המתאם בין מהירויות הסיבוב של הכוכבים במערכת או על כיווני הספין שלהם.

Slettebak (1963) מצא כי אין הבדל בין מהירות הסיבוב של כוכבים בודדים ובין מהירות הסיבוב של אלו השייכים למערכות זוגיות. Abt (2001) מצא כי התפלגות כיווני ציר הסיבוב העצמי של כוכבים (ספין) הנה כנראה אקראית.

לכן, נראה כי האפשרות שהצגנו לעיל קיימת באופן תיאורטי, אולם ההסתברות שהיא תתקיים היא כנראה קלושה.

אם כן, ניתן להסיק מהתוצאות שקיבלנו היא כי מתאם אכן קיים, הן בין כיוון צירי הסיבוב העצמי (ספין) של כוכבים במערכת זוגית והן בין גודל מהירות הסיבוב העצמי שלהם (הקשור בתנע הזוויתי המקורי של המערכת בה נוצרו). כלומר, $v_1 \approx v_2$ וגם $\sin i_1 \approx \sin i_2$.

קושי אפשרי שניתן לחשוב עליו, הוא הטיה סטטיסטית (Selection Effect). אנו עשויים לחשוב כי הטיה סטטיסטית מתרחשת כיוון שקל לזהות את הכוכבים הזוגיים הקרובים כזוג כיוון שזמן המחזור שלהם קצר יחסית. זוגות שזמן המחזור שלהם ארוך יותר, מסדר גודל של חודשים או אפילו שנים, קשה יותר לזהות כזוג. אחרים שנדרשו לתופעה זו, דוגמת Jäschek and Gomez (1970) מצאו כי מידת ההשפעה של ההטיה סטטיסטית הינה בעלת משמעות קטנה בלבד. במאמר נוסף שפרסם, מצא Jäschek (1970), כי השפעת ההטיה הסטטיסטית אינה חשובה במיוחד.

לסיכום נאמר כי במערכות זוגיות אמיתיות יש מתאם (חזק) בין היטלי מהירויות הסיבוב של בני הזוג. גדלים אלו (היטלי מהירויות הסיבוב) תלויים בשני גורמים: (א) חלוקת התנע הזוויתי המקורי.

(ב) הגיאומטריה של הבעיה אינה פריקה – כלומר, בשל מגבלות תצפית אין אנו

יכולים להפריד את הגודל הנמדד $v_k \sin i_k$ לגדלים v_k ו- $\sin i_k$.

ניתן לפרש את התוצאות שקיבלנו באופן הבא:

א. יש התאמה בין כיווני הספין של הכוכבים במערכת.

ב. יש התאמה במהירות הסיבוב העצמי של הכוכבים בה.

היות ועדיין אין תיאוריה כללית מקובלת אודות היווצרות זוגות, התוצאות שהוצגו בעבודה זו יכולות להוות תנאי התחלה ואילוץ לתיאוריה כזאת, לכשתיווצר.

נספח א' – מדידת היטל מהירות הסיבוב של כוכבים

מדידת היטל הסיבוב של כוכבים הינה בעיה מורכבת. כפי שהראינו בפרק המבוא, כאשר כוכב מתרחק או מתקרב, הקווים הספקטראליים של היסודות בו מוזזים בגלל אפקט דופלר. ניתן לחשב את המהירות המסילתית של הכוכב בקלות על-ידי שימוש במשוואה 1.2.4.1,

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$$

כאשר כוכב מסתובב נגרמת הרחבה סיבובית של הקווים הספקטראליים. גם כאן אנו מקבלים ביטוי לאפקט דופלר, אלא שכאן בניגוד למקרה של המהירות המסלולית, האפקט מתבטא בהרחבה של הקווים הספקטראליים. הקושי בניתוח ההרחבה של הקווים הספקטראליים נובע מכך שההרחבה תלויה בכמה גורמים. נוסף על ההרחבה הסיבובית (אותה הזכרנו קודם), קיימת הרחבה תרמית, טורבולנטית והרחבה המושפעת משדה מגנטי. מלאכת פענוח ההרחבה הספקטראלית נעשית מורכבת עוד יותר אם מדובר בכוכב שבו בנוסף קיימת האפלט שפה.

כיוון שמדובר בהרכבה של פונקציות שונות (קונבולוציה) לא ניתן להפריד בצורה חד משמעית את ההרחבות השונות. למעשה, אין אנו יודעים את הפונקציות המקוריות המרכיבות את האינטגרנד של פונקצית הקונבולוציה. קיימות מספר דרכים להתמודד עם הבעיה, המאפשרות לקבל נתונים בטווח שגיאה קטן יחסית.

מדידת ההיטלים של מהירויות סיבוב גבוהות פשוטה יחסית. כאשר המהירויות גבוהות, ההרחבה התרמית זניחה כיוון שהיא קטנה בהרבה מההרחבה הסיבובית. כאשר רואים בספקטרום הנבדק קווים של יסודות שונים מדידת היטל המהירות

הופכת למשימה פשוטה עוד יותר כיוון שמידת ההרחבה התרמית תלויה במסה של היסודות הנמדדים:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}K\langle T \rangle$$

בעוד ההרחבה הסיבובית תלויה בגיאומטריית הכוכב בלבד (כאן $\langle T \rangle$ הטמפרטורה הממוצעת על פני הכוכב, K קבוע בולצמן, v^2 ריבוע המהירות התרמית של היסוד m - מסתו).

כדי לקבל תחושה באילו סדרי גודל מדובר ערכנו טבלה המדגימה את השפעת ההרחבה התרמית עבור יסוד בעל מסה קטנה (מימן) ועבור יסוד בעל מסה גדולה (ברזל) במקרה של טמפרטורה גבוהה (20000 K) ובמקרה של טמפרטורה נמוכה (8000 K) (טבלה 7).

טבלה 7. השוואת הרחבה תרמית והרחבה סיבובית

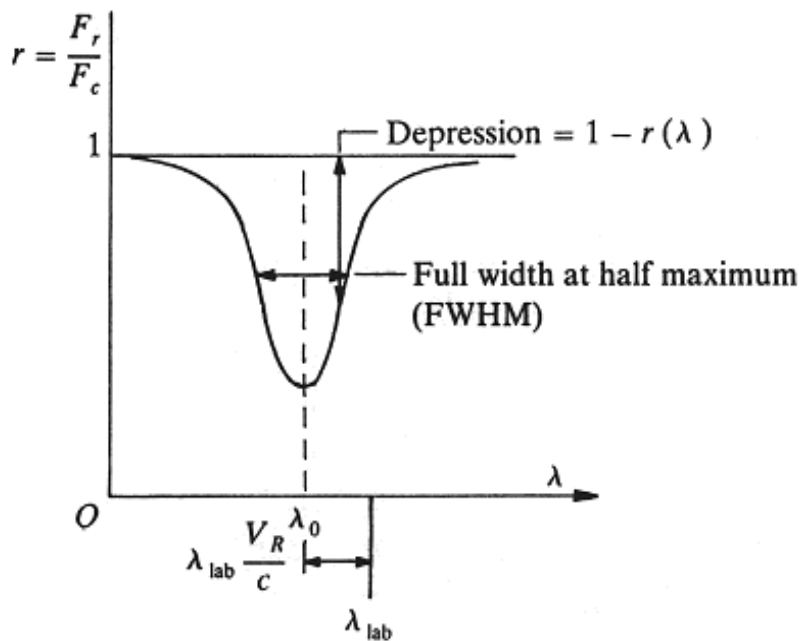
$\langle T \rangle$ (K)	ההרחבה בקווי Fe (Km/Sec)	ההרחבה בקווי H (Km/Sec)
8000	~0.6	~4.45
20000	~0.94	~7

מטבלה 7. עולה כי התרומה של ההרחבה התרמית הטהורה ביסוד כבד כמו ברזל (Fe) אינה משמעותית כלל הן בטמפרטורות גבוהות (20000 K) והן בטמפרטורות נמוכות (8000 K). כלומר, התרומה של ההרחבה התרמית לשגיאה עבור מדידת היטל מהירות הסיבוב הינה מסדר גודל של פחות מ- $\pm 1 \text{ Km/Sec}$. עבור מימן (H) התרומה של ההרחבה התרמית הטהורה הינה משמעותית מעט יותר (הדבר נכון במיוחד בטמפרטורות גבוהות (20000 K) ופחות בטמפרטורות נמוכות (8000 K)). אולם, עדיין מדובר בהשפעה נמוכה יחסית. כלומר, התרומה של

ההרחבה התרמית לשגיאה עבור מדידת היטל מהירות הסיבוב הינה מסדר גודל של $\pm 4 \text{ Km/Sec}$ בטמפרטורות הנמוכות ו- $\pm 7 \text{ Km/Sec}$ בטמפרטורות הגבוהות. כל ההרחבות הללו הן עדיין קטנות ביחס להיטלי מהירויות הסיבוב הנמדדים שהם מסדרי גודל של עשרות ק"מ לשנייה. לכן, אף-על-פי שעקרונית הקו הנמדד הוא קונבולוציה של פרופיל הסיבוב עם הפרופיל התרמי, הרי שבמקרה שלנו ניתן להזניח את ההרחבה התרמית ולקבל ישירות את ההרחבה הסיבובית.

מקובל למדוד את רוחב הקו בחצי המקסימום (FWHM) (ראה איור 10) (FWHM – full width at half maximum) ולקחת גודל זה בתור היטל המהירות הסיבובית,

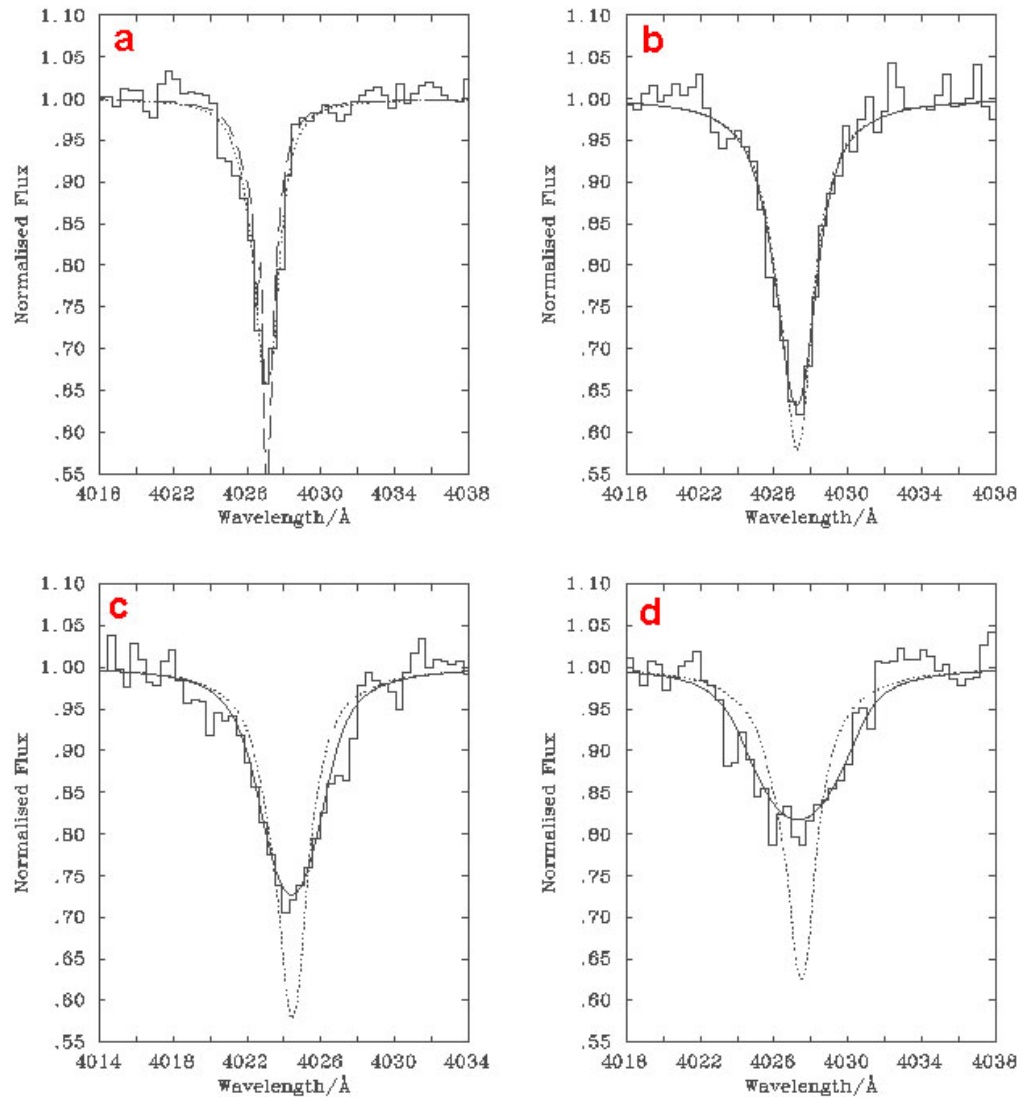
$$V \sin i = \frac{1}{2} FWHM$$



איור 10. פרופיל של קו ספקטראלי (Schatzman and Paderie, 1993).

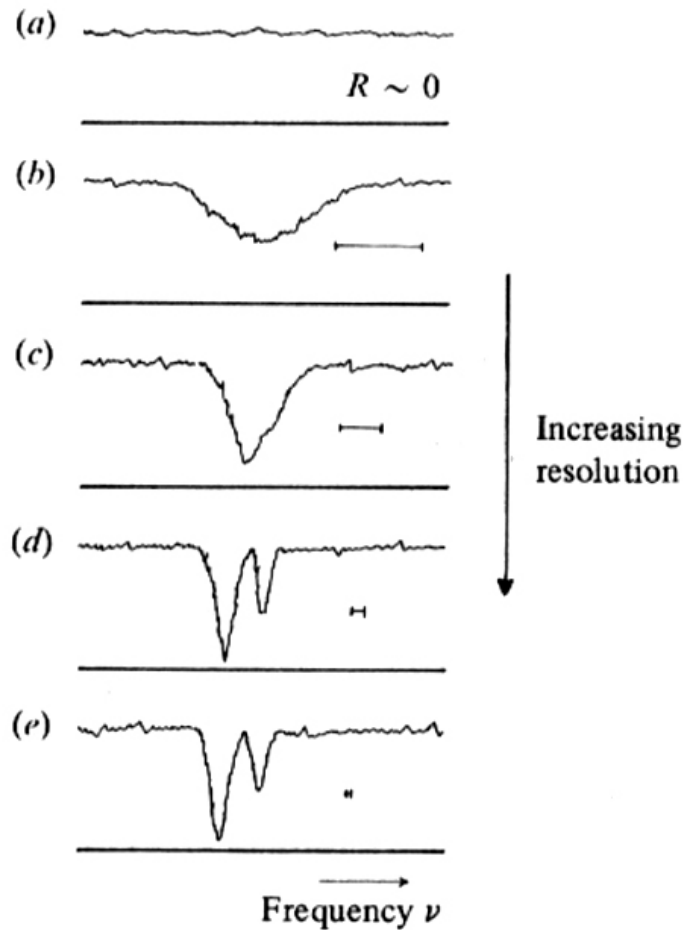
שיטה זו הינה טובה דיה לשימוש בכוכבים שהיטל מהירות הסיבוב שלהם גבוהה מ- 10 ק"מ/שנייה, ועבור כוכבים אלו אכן משמשת עד היום. כאשר מדובר בכוכבים שהיטל מהירות הסיבוב שלהם נמוכה מ- 10 ק"מ/שנייה, אנו נכנסים לגבול השגיאה והמדידה הופכת לבעייתית מאוד.

לאחרונה פורסמו מאמרים רבים שמטרתם – מציאת שיטה יעילה (ככל שניתן) למדידה מדויקת של היטל מהירות הסיבוב של כוכבים, כולל האיטיים שבהם. בעבודות רבות (כמו בזו של Groot et al., 1996) נערכה אנליזת פורייה של הקווים הספקטראליים. בעבודות אחרות, כמו בזו של Magee et al. (1998), נבדקה השפעת היטל המהירות הזוויתית על-ידי שימוש בשיטות נומריות (ראה איור 11). כאן נבדקה ההתאמה הטובה ביותר בין פונקציות שונות הגורמות באופן תיאורטי להרחבה, ונבחרו אלו שתאמו את המדידות בצורה הטובה ביותר. הקו השבור בכל אחד מהגרפים (a עד d) מסמן את תוצאות המדידות הקו הרציף הוא ההתאמה התיאורטית והקו המקווקו הוא פרופיל העקיפה של הסדק.



איור 11. הדגמה של התאמה בין ההרחבה התיאורטית לבין זו הנמדדת עבור מהירות של 0 ק"מ/שנייה (a), 60 ק"מ/שנייה (b), 180 ק"מ/שנייה (c), ו-260 ק"מ/שנייה (d) (Magee et al., 1998).

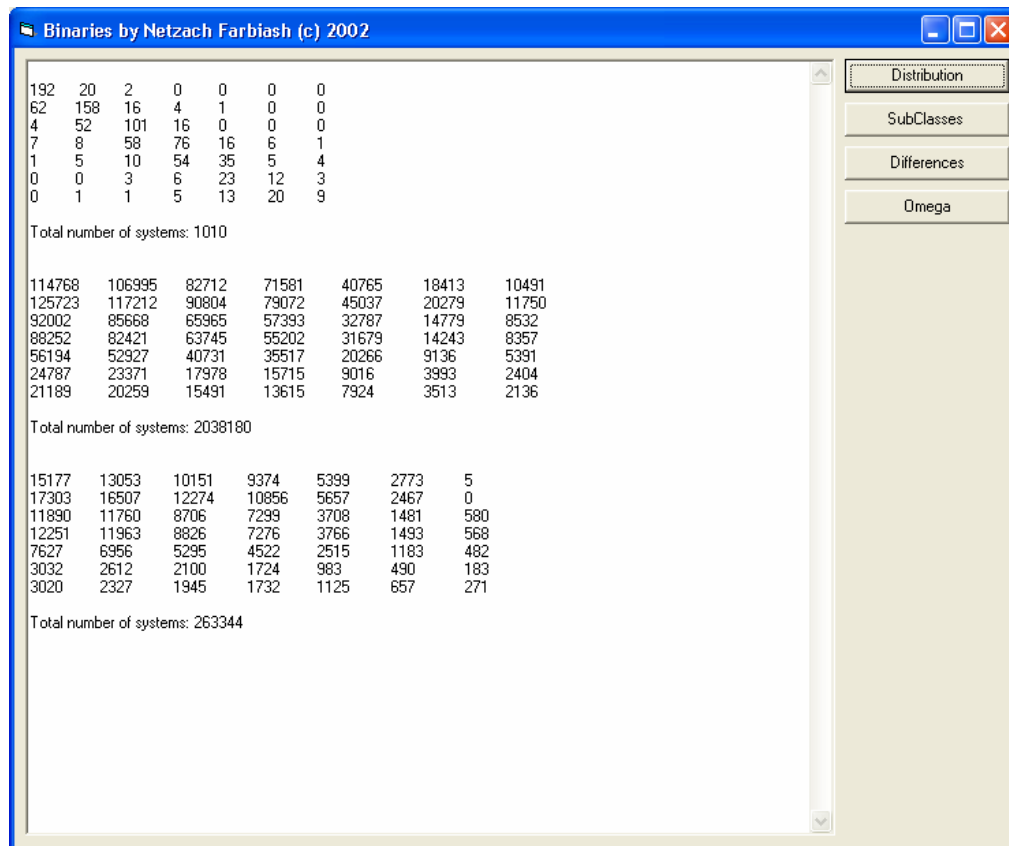
עד כה הזכרנו רק פרמטרים פיסיקליים המקשים על הפירוש של מדידת היטל המהירות הזוויתית. אולם, בעיה חמורה לא פחות היא המגבלה הטכנית של המדידה. ברור כי הרזולוציה שבה מודדים קווים ספקטראליים משפיעה מאוד על איכות המידע המתקבל. ככל שמגדילים את הרזולוציה (כלומר, מגדילים את כמות המידע המתקבל) מקבלים הפחתה של הגורם הקרוי "הפרופיל של מכשיר המדידה". הגדלת הרזולוציה מאפשרת לכן בחינה מדוקדקת של קווים שהיה קשה עד בלתי אפשרי להבחין בהם ברזולוציות נמוכות (ראה איור 12) ובכך להקטין מאוד את השגיאה במדידה.



איור 12. מבט על קו ספקטראלי ברזולוציה הולכת וגדלה. במצב (a) לא ניתן כלל להבחין בקו הספקטראלי, ככל שההבחנה הולכת וגדלה מבחינים בקו ברור (b) ו-(c) וכאשר ההבחנה גבוהה מספיק רואים כי הקו הוא למעשה שני קווים שונים הקרובים זה לזה (d) ו-(e). (Lena, Lebrun, and Mignard, 1998)

נספח א' – תוכנית המחשב

תוכנית המחשב אשר שימשה למחקר נכתבה בשפת התכנות – Visual Basic 6 של חברת Microsoft. התוכנית נבנתה כך שהיא מתבססת על קובץ נתונים (בתצורת ASCII) המכיל 1010 רשומות אשר כל אחת מהן כוללת את נתוני המהירות של כל אחד מהכוכבים במערכת זוגית ואת הסוג הספקטראלי שלהם (באופן מקודד). קובץ הנתונים נבנה על בסיס קטלוג מהירות הסיבוב של כוכבים (Catalog of Stellar Projected Rotational Vel., Glebocki et al., 2000). עיבוד קובץ הקטלוג בוצע בתוכנת Excel XP של חברת Microsoft, ותוצאת העיבוד נשמרה כקובץ נתונים בפורמט ASCII. על מנת לפשט את הפעלת התוכנית, היא נבנתה במתכונת של חלון ראשי ובצדו ארבעה כפתורים: Distribution, SubClasses, Differences ו-Omega.



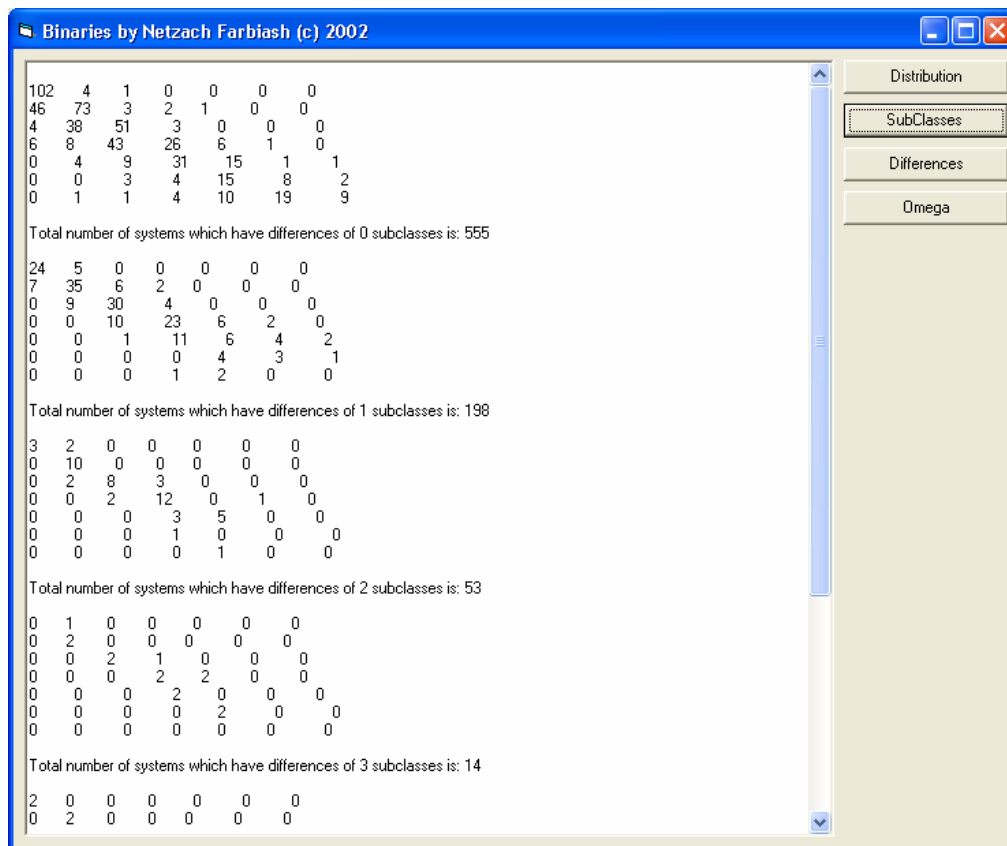
תמונת מסך 1 – תוצאות החישוב לאחר לחיצה על כפתור ה-Distribution.

א. כפתור ה – Distribution

לחיצה על כפתור ה – Distribution מפעילה את סדרת הפעולות הבאות:

1. המחשב מבצע סריקה של המערך בו מאוחסנים הנתונים של הזוגות האמיתיים וסופר כמה מהם נמצאים בכל אחד מהמקומות השונים בטבלה (49 אפשרויות שונות). הנתונים המתקבלים מוצגים בטבלה ובסיומה מוצג סכום כל התאים על-מנת לוודא שאין טעות בספירה.
2. המחשב מבצע שלושה ערבובים של המערך המקורי (המערכות האמיתיות): כל בן זוג ראשי עם כל הראשיים האחרים, כל בן זוג משני עם כל המשניים האחרים, וכל בן זוג עם כל בני הזוג האחרים מלבד בני הזוג האמיתיים. הנתונים מאוחסנים במערך חדש.
3. המחשב מבצע סריקה של המערך החדש וסופר כמה זוגות כוכבים נמצאים בכל אחד מהמקומות השונים בטבלה. כמקודם, הנתונים המתקבלים מוצגים בטבלה ובסיומה מוצג סכום כל התאים על-מנת לוודא שאין טעות בספירה.
4. נתוני המערך החדש נשמרים בקובץ נתונים נפרד – בו השתמשנו כדי לשרטט את גרף האילוסטרציה עבור הזוגות AB.
5. כפי שפירטנו בסעיף 2, המחשב מבצע שלושה ערבובים של המערך המקורי (המערכות האמיתיות). כאן, בניגוד לפעם הקודמת, נרשמים במערך הנתונים רק הזוגות שבהם המרחק הספקטראלי בין הכוכבים אינו עולה על שתי תת רמות ספקטראליות.
6. המחשב מבצע סריקה של המערך האחרון וסופר כמה זוגות כוכבים נמצאים בכל אחד מהמקומות השונים בטבלה. כמקודם, הנתונים המתקבלים מוצגים בטבלה ובסיומה מוצג סכום כל התאים על-מנת לוודא שאין טעות בספירה.
7. נתוני המערך החדש נשמרים בקובץ נתונים נפרד – בו השתמשנו כדי לשרטט את גרף האילוסטרציה עבור הזוגות ABR.

ב. כפתור ה - SubClasses

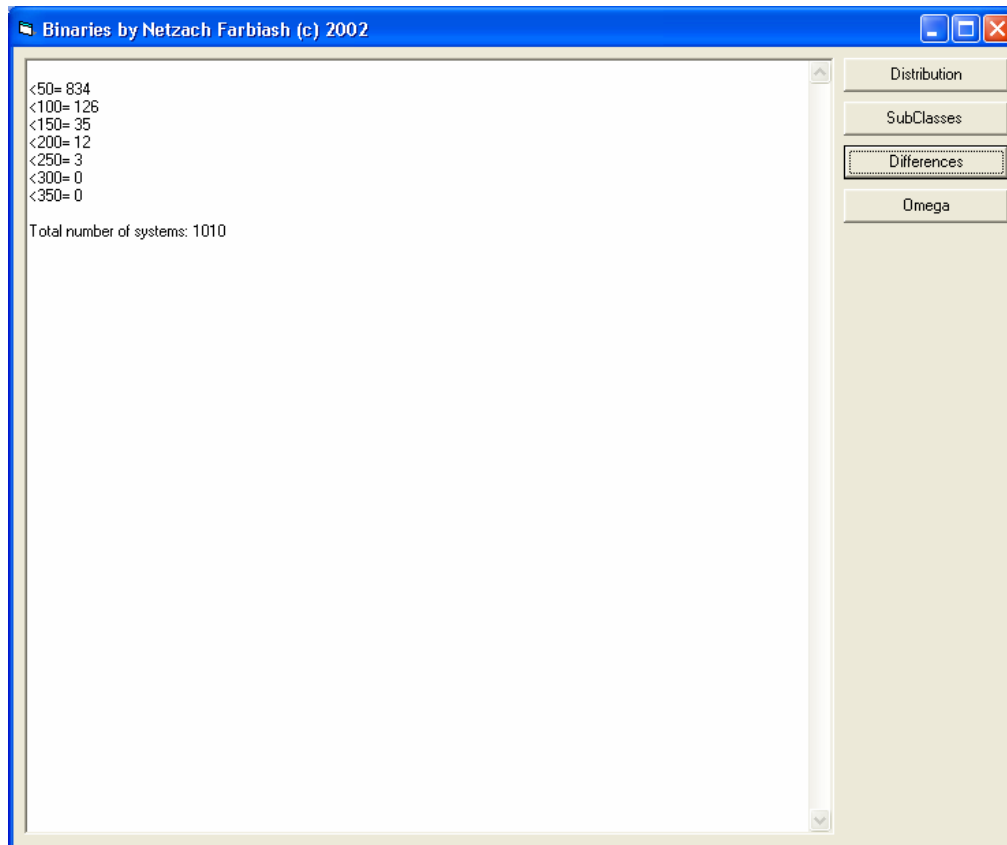


תמונת מסך 2 – תוצאות החישוב לאחר לחיצה על כפתור ה - SubClasses.

לחיצה על כפתור ה - SubClasses מפעילה סדרת פעולות דומה מאוד לזו של כפתור ה-Distribution, אלא שהפעם נוסף תנאי על המרווח הספקטראלי בין בני הזוג. באופן הזה אנו מקבלים מערכים נפרדים עבור הקבוצות השונות, הנבדלות זו מזו על-ידי המרחק הספקטראלי שבין בני הזוג שבהן.

ג. כפתור ה - Differences

לחיצה על כפתור ה- Differences מפעילה סדרת פעולות הסופרת את מספר הזוגות שההבדל בין היטל המהירויות שלהם קטן מ- 50 ק"מ/שנייה, 100 ק"מ/שנייה וכו'.



תמונת מסך 3 – תוצאות החישוב לאחר לחיצה על כפתור ה - Differences.

כפתור ה- Omega מבצע ספירה מדויקת מאוד של הפרשי היטל המהירות הזוויתית בין בני זוג במערכות הזוגיות האמיתיות, אולם בעבודה זו לא נעשה שימוש בתוצאות אלו.

לצורך עיבוד הנתונים שהתקבלו בתוכנית זו והצגתם בגרפים השתמשנו בתוכנת Origin 6 של חברת Microcal.

קוד התוכנית:

```
Private Sub Differences_Click()

Dim i As Variant
Dim C5050, C10050, C15050, C20050, C25050, C30050, C35050

C5050 = 0: C10050 = 0: C15050 = 0: C20050 = 0: C25050 = 0: C30050 = 0: C35050
= 0

i = 0

'Building two arrays, one for the first component
'of each binary system, and the other for the second one.

Dim StarA(1010, 2) As Integer
Dim StarB(1010, 2) As Integer

'Inserting the data into the arrays

Open "c:\vb\binaries\data.txt" For Input As #1

Do Until EOF(1)
    Input #1, StarA(i, 2), StarA(i, 1)
    Input #1, StarB(i, 2), StarB(i, 1)
    i = i + 1
Loop

Close #1

For i = 0 To 1009

    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) < 50 Then C5050 = C5050 + 1
    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) < 100 And Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) >= 50 Then
C10050 = C10050 + 1
    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) < 150 And Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) >= 100
Then C15050 = C15050 + 1
    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) < 200 And Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) >= 150
Then C20050 = C20050 + 1
    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) < 250 And Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) >= 200
Then C25050 = C25050 + 1
    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) < 300 And Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) >= 250
Then C30050 = C30050 + 1
    If Abs(StarA(i, 2) - StarB(i, 2)) >= 300 Then C35050 = C35050 + 1

Next i

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<50=" & C5050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<100=" & C10050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<150=" & C15050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<200=" & C20050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<250=" & C25050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<300=" & C30050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "<350=" & C35050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10) & "Total number of
systems: "
Text.Text = Text.Text & C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 +
C35050 + C50100 + C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 +
c350100 + C50150 + C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 +
c350150 + C50200 + C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 +
```

```
c350200 + c50250 + c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 +  
c350250 + c50300 + c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 +  
c350300 + c50350 + c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 +  
c350350  
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10)
```

End Sub

```
Private Sub Distribution_Click()
```

```
Dim i, j, k As Variant  
Dim C5050, C10050, C15050, C20050, C25050, C30050, C35050, C50100,  
C100100, c150100, c200100, c250100, c300100, c350100, C50150, C100150,  
c150150, c200150, c250150, c300150, c350150, C50200, C100200, c150200,  
c200200, c250200, c300200, c350200, c50250, c100250, c150250, c200250,  
c250250, c300250, c350250, c50300, c100300, c150300, c200300, c250300,  
c300300, c350300, c50350, c100350, c150350, c200350, c250350, c300350,  
c350350 As Variant  
Dim C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 As Variant  
  
C5050 = 0: C10050 = 0: C15050 = 0: C20050 = 0: C25050 = 0: C30050 = 0: C35050  
= 0  
C50100 = 0: C100100 = 0: c150100 = 0: c200100 = 0: c250100 = 0: c300100 = 0:  
c350100 = 0  
C50150 = 0: C100150 = 0: c150150 = 0: c200150 = 0: c250150 = 0: c300150 = 0:  
c350150 = 0  
C50200 = 0: C100200 = 0: c150200 = 0: c200200 = 0: c250200 = 0: c300200 = 0:  
c350200 = 0  
c50250 = 0: c100250 = 0: c150250 = 0: c200250 = 0: c250250 = 0: c300250 = 0:  
c350250 = 0  
c50300 = 0: c100300 = 0: c150300 = 0: c200300 = 0: c250300 = 0: c300300 = 0:  
c350300 = 0  
c50350 = 0: c100350 = 0: c150350 = 0: c200350 = 0: c250350 = 0: c300350 = 0:  
c350350 = 0  
  
C1 = C2 = C3 = C4 = C5 = C6 = C7 = 0  
  
i = 0  
j = 0  
k = 0
```

```
'Building two arrays, one for the first component  
'of each binary system, and the other for the second one.
```

```
Dim StarA(1010, 2) As Integer  
Dim StarB(1010, 2) As Integer
```

```
'Building two arrays, one for the first component  
'of each artificial binary system,  
'and the other for the second one.
```

```
Dim MixA(2038180) As Integer  
Dim MixB(2038180) As Integer
```

```
'Inserting the data into the arrays
```

```
Open "c:\vbbinaries\data.txt" For Input As #1
```

```
Do Until EOF(1)  
Input #1, StarA(i, 2), StarA(i, 1)
```

```
Input #1, StarB(i, 2), StarB(i, 1)
i = i + 1
Loop
```

```
Close #1
```

```
For i = 0 To 1009
```

```
  ' u2 when u1<=50
```

```
    If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) <= 50 Then C5050 = C5050 + 1
    If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) <= 50 Then C10050 =
C10050 + 1
    If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) <= 50 Then C15050 =
C15050 + 1
    If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) <= 50 Then C20050 =
C20050 + 1
    If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) <= 50 Then C25050 =
C25050 + 1
    If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) <= 50 Then C30050 =
C30050 + 1
    If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) <= 50 Then C35050 = C35050 + 1
```

```
  ' u2 when 50<u1<=100
```

```
    If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <= 100 Then C50100 =
C50100 + 1
    If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <=
100 Then C100100 = C100100 + 1
    If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <=
100 Then c150100 = c150100 + 1
    If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <=
100 Then c200100 = c200100 + 1
    If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <=
100 Then c250100 = c250100 + 1
    If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <=
100 Then c300100 = c300100 + 1
    If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) > 50 And StarB(i, 2) <= 100 Then C35050 =
c350100 + 1
```

```
  ' u2 when 100<u1<=150
```

```
    If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2) <= 150 Then C50150 =
C50150 + 1
    If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2) <=
150 Then C100150 = C100150 + 1
    If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2)
<= 150 Then c150150 = c150150 + 1
    If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2)
<= 150 Then c200150 = c200150 + 1
    If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2)
<= 150 Then c250150 = c250150 + 1
    If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2)
<= 150 Then c300150 = c300150 + 1
    If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) > 100 And StarB(i, 2) <= 150 Then c350150 =
c350150 + 1
```

```
  ' u2 when 150<u1<=200
```

If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then C50200 = C50200 + 1
If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then C100200 = C100200 + 1
If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then c150200 = c150200 + 1
If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then c200200 = c200200 + 1
If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then c250200 = c250200 + 1
If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then c300200 = c300200 + 1
If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) > 150 And StarB(i, 2) <= 200 Then c350200 = c350200 + 1

' u2 when 200<u1<=250

If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c50250 = c50250 + 1
If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c100250 = c100250 + 1
If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c150250 = c150250 + 1
If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c200250 = c200250 + 1
If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c250250 = c250250 + 1
If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c300250 = c300250 + 1
If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) > 200 And StarB(i, 2) <= 250 Then c350250 = c350250 + 1

' u2 when 250<u1<=300

If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c50300 = c50300 + 1
If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c100300 = c100300 + 1
If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c150300 = c150300 + 1
If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c200300 = c200300 + 1
If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c250300 = c250300 + 1
If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c300300 = c300300 + 1
If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) > 250 And StarB(i, 2) <= 300 Then c350300 = c350300 + 1

' u2 when 300<u1<=350

If StarA(i, 2) <= 50 And StarB(i, 2) > 300 Then c50350 = c50350 + 1
If StarA(i, 2) > 50 And StarA(i, 2) <= 100 And StarB(i, 2) > 300 Then c100350 = c100350 + 1
If StarA(i, 2) > 100 And StarA(i, 2) <= 150 And StarB(i, 2) > 300 Then c150350 = c150350 + 1
If StarA(i, 2) > 150 And StarA(i, 2) <= 200 And StarB(i, 2) > 300 Then c200350 = c200350 + 1
If StarA(i, 2) > 200 And StarA(i, 2) <= 250 And StarB(i, 2) > 300 Then c250350 = c250350 + 1

```
If StarA(i, 2) > 250 And StarA(i, 2) <= 300 And StarB(i, 2) > 300 Then c300350 = c300350 + 1
```

```
If StarA(i, 2) > 300 And StarB(i, 2) > 300 Then c350350 = c350350 + 1
```

```
Next i
```

```
' Making the table of the 1010 real systems
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C5050 & " " & C10050 & " " & C15050 & " " & C20050 & " " & C25050 & " " & C30050 & " " & C35050
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50100 & " " & C100100 & " " & c150100 & " " & c200100 & " " & c250100 & " " & c300100 & " " & c350100
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50150 & " " & C100150 & " " & c150150 & " " & c200150 & " " & c250150 & " " & c300150 & " " & c350150
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50200 & " " & C100200 & " " & c150200 & " " & c200200 & " " & c250200 & " " & c300200 & " " & c350200
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50250 & " " & c100250 & " " & c150250 & " " & c200250 & " " & c250250 & " " & c300250 & " " & c350250
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50300 & " " & c100300 & " " & c150300 & " " & c200300 & " " & c250300 & " " & c300300 & " " & c350300
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50350 & " " & c100350 & " " & c150350 & " " & c200350 & " " & c250350 & " " & c300350 & " " & c350350
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10) & "Total number of systems: "
```

```
Text.Text = Text.Text & C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 + C35050 + C50100 + C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 + c350100 + C50150 + C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 + c350150 + C50200 + C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 + c350200 + c50250 + c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 + c350250 + c50300 + c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 + c350300 + c50350 + c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 + c350350
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10)
```

```
' Mixing all the stars except the real pairs.
```

```
' We could get 2038180 pairs.
```

```
' Mixing all the u1 with u2
```

```
For i = 0 To 1009
```

```
For j = 0 To 1009
```

```
If i <> j Then
```

```
MixA(k) = StarA(i, 2)
```

```
MixB(k) = StarB(j, 2)
```

```
k = k + 1
```

```
Else: t = t + 1
```

```
End If
```

```
Next j
```

```
Next i
```

```
j = 0
```

```
' Mixing u1 with u1
```

```
For i = 0 To 1008
```

```
  For j = i + 1 To 1009
```

```
    MixA(k) = StarA(i, 2)
```

```
    MixB(k) = StarA(j, 2)
```

```
    k = k + 1
```

```
  Next j
```

```
Next i
```

```
' Mixing u2 with u2
```

```
j = 0
```

```
For i = 0 To 1008
```

```
  For j = i + 1 To 1009
```

```
    MixA(k) = StarB(i, 2)
```

```
    MixB(k) = StarB(j, 2)
```

```
    k = k + 1
```

```
  Next j
```

```
Next i
```

```
C5050 = 0: C10050 = 0: C15050 = 0: C20050 = 0: C25050 = 0: C30050 = 0: C35050 = 0
```

```
C50100 = 0: C100100 = 0: c150100 = 0: c200100 = 0: c250100 = 0: c300100 = 0: c350100 = 0
```

```
C50150 = 0: C100150 = 0: c150150 = 0: c200150 = 0: c250150 = 0: c300150 = 0: c350150 = 0
```

```
C50200 = 0: C100200 = 0: c150200 = 0: c200200 = 0: c250200 = 0: c300200 = 0: c350200 = 0
```

```
c50250 = 0: c100250 = 0: c150250 = 0: c200250 = 0: c250250 = 0: c300250 = 0: c350250 = 0
```

```
c50300 = 0: c100300 = 0: c150300 = 0: c200300 = 0: c250300 = 0: c300300 = 0: c350300 = 0
```

```
c50350 = 0: c100350 = 0: c150350 = 0: c200350 = 0: c250350 = 0: c300350 = 0: c350350 = 0
```

```
' Count the number of systems in each category for the mixed stars
```

```
For i = 0 To 2038179
```

```
  ' u2 when u1<=50
```

```
    If MixA(i) <= 50 And MixB(i) <= 50 Then C5050 = C5050 + 1
```

```
1    If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) <= 50 Then C10050 = C10050 +
```

```
1    If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) <= 50 Then C15050 = C15050 +
```

```
1    If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) <= 50 Then C20050 = C20050 +
```

```
1    If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) <= 50 Then C25050 = C25050 +
```

```
1    If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) <= 50 Then C30050 = C30050 +
```

```
1    If MixA(i) > 300 And MixB(i) <= 50 Then C35050 = C35050 + 1
```

```
  ' u2 when 50<u1<=100
```

```
1    If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then C50100 = C50100 +
```

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
C100100 = C100100 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c150100 = c150100 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c200100 = c200100 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c250100 = c250100 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c300100 = c300100 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then c350100 = c350100 +
1

' u2 when 100<u1<=150

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then C50150 = C50150 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
C100150 = C100150 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c150150 = c150150 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c200150 = c200150 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c250150 = c250150 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c300150 = c300150 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then c350150 = c350150
+ 1

' u2 when 150<u1<=200

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then C50200 = C50200 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
C100200 = C100200 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c150200 = c150200 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c200200 = c200200 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c250200 = c250200 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c300200 = c300200 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then c350200 = c350200
+ 1

' u2 when 200<u1<=250

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then c50250 = c50250 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c100250 = c100250 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c150250 = c150250 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c200250 = c200250 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c250250 = c250250 + 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c300250 = c300250 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then c350250 = c350250
+ 1

' u2 when 250<u1<=300

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then c50300 = c50300 +
1

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c100300 = c100300 + 1

If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c150300 = c150300 + 1

If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c200300 = c200300 + 1

If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c250300 = c250300 + 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c300300 = c300300 + 1

If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then c350300 = c350300
+ 1

' u2 when 300<u1<=350

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 300 Then c50350 = c50350 + 1

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 300 Then c100350 = c100350 +
1

If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 300 Then c150350 = c150350
+ 1

If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 300 Then c200350 = c200350
+ 1

If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 300 Then c250350 = c250350
+ 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 300 Then c300350 = c300350
+ 1

If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 300 Then c350350 = c350350 + 1

Next i

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C5050 & " " & C10050 & " " &
C15050 & " " & C20050 & " " & C25050 & " " & C30050 & " " &
C35050

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50100 & " " & C100100 & " " &
c150100 & " " & c200100 & " " & c250100 & " " & c300100 & " " &
& c350100

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50150 & " " & C100150 & " " &
& c150150 & " " & c200150 & " " & c250150 & " " & c300150 & " " &
" & c350150

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50200 & " " & C100200 & " " &
& c150200 & " " & c200200 & " " & c250200 & " " & c300200 & " " &
" & c350200

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50250 & " " & c100250 & " " &
& c150250 & " " & c200250 & " " & c250250 & " " & c300250 & " " &
" & c350250

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50300 & " " & c100300 & " " &
& c150300 & " " & c200300 & " " & c250300 & " " & c300300 & " " &
" & c350300

Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50350 & " " & c100350 & " " &
& c150350 & " " & c200350 & " " & c250350 & " " & c300350 & " " &
" & c350350


```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10) & "Total number of
systems: "
Text.Text = Text.Text & C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 +
C35050 + C50100 + C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 +
c350100 + C50150 + C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 +
c350150 + C50200 + C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 +
c350200 + c50250 + c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 +
c350250 + c50300 + c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 +
c350300 + c50350 + c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 +
c350350
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10)
```

```
j = C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 + C35050 + C50100 +
C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 + c350100 + C50150 +
C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 + c350150 + C50200 +
C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 + c350200 + c50250 +
c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 + c350250 + c50300 +
c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 + c350300 + c50350 +
c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 + c350350
```

```
Open "c:\vb binaries\Mixdata.txt" For Output As #1
```

```
For i = 0 To j
  Print #1, MixA(i) & Chr(9); MixB(i)
Next i
```

```
Close #1
```

```
' Mixing the systems, but under spectral restriction
' Cleaning the array
```

```
For c = 0 To 2038179
  MixA(c) = 0
  MixB(c) = 0
Next c
```

```
j = 0
k = 0
```

```
' Mixing u1 with u2
```

```
For i = 0 To 1009
  For j = 0 To 1009
    If Abs(StarA(i, 1) - StarB(j, 1)) <= 2 Then
      If i <> j Then
        MixA(k) = StarA(i, 2)
        MixB(k) = StarB(j, 2)
        k = k + 1
      End If
    End If
  Next j
Next i
```

```
j = 0
```

```
' Mixing u1 with u1
```

```
For i = 0 To 77
```

```
For j = i + 1 To 78
  If Abs(StarA(i, 1) - StarA(j, 1)) <= 2 Then
    MixA(k) = StarA(i, 2)
    MixB(k) = StarA(j, 2)
    k = k + 1
  End If
Next j
Next i
```

j = 0

' Mixing u2 with u2

```
For i = 0 To 77
  For j = i + 1 To 78
    If Abs(StarB(i, 1) - StarB(j, 1)) <= 2 Then
      MixA(k) = StarB(i, 2)
      MixB(k) = StarB(j, 2)
      k = k + 1
    End If
  Next j
Next i
```

```
C5050 = 0: C10050 = 0: C15050 = 0: C20050 = 0: C25050 = 0: C30050 = 0: C35050
= 0
C50100 = 0: C100100 = 0: c150100 = 0: c200100 = 0: c250100 = 0: c300100 = 0:
c350100 = 0
C50150 = 0: C100150 = 0: c150150 = 0: c200150 = 0: c250150 = 0: c300150 = 0:
c350150 = 0
C50200 = 0: C100200 = 0: c150200 = 0: c200200 = 0: c250200 = 0: c300200 = 0:
c350200 = 0
c50250 = 0: c100250 = 0: c150250 = 0: c200250 = 0: c250250 = 0: c300250 = 0:
c350250 = 0
c50300 = 0: c100300 = 0: c150300 = 0: c200300 = 0: c250300 = 0: c300300 = 0:
c350300 = 0
c50350 = 0: c100350 = 0: c150350 = 0: c200350 = 0: c250350 = 0: c300350 = 0:
c350350 = 0
```

' Count the number of systems in each category for the mixed stars

```
For i = 0 To 2038179
  If MixB(i) And MixA(i) <> 0 Then

    ' u2 when u1<=50

    If MixA(i) <= 50 And MixB(i) <= 50 Then C5050 = C5050 + 1
    If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) <= 50 Then C10050 = C10050 +
1
    If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) <= 50 Then C15050 = C15050 +
1
    If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) <= 50 Then C20050 = C20050 +
1
    If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) <= 50 Then C25050 = C25050 +
1
    If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) <= 50 Then C30050 = C30050 +
1
    If MixA(i) > 300 And MixB(i) <= 50 Then C35050 = C35050 + 1

    ' u2 when 50<u1<=100
```

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then C50100 = C50100 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
C100100 = C100100 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c150100 = c150100 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c200100 = c200100 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c250100 = c250100 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c300100 = c300100 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then C35050 = c350100 +
1

' u2 when 100<u1<=150

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then C50150 = C50150 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
C100150 = C100150 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c150150 = c150150 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c200150 = c200150 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c250150 = c250150 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c300150 = c300150 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then c350150 = c350150
+ 1

' u2 when 150<u1<=200

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then C50200 = C50200 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
C100200 = C100200 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c150200 = c150200 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c200200 = c200200 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c250200 = c250200 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c300200 = c300200 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then c350200 = c350200
+ 1

' u2 when 200<u1<=250

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then c50250 = c50250 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c100250 = c100250 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c150250 = c150250 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c200250 = c200250 + 1

```
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c250250 = c250250 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c300250 = c300250 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then c350250 = c350250
+ 1
```

' u2 when 250<u1<=300

```
If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then c50300 = c50300 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c100300 = c100300 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c150300 = c150300 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c200300 = c200300 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c250300 = c250300 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c300300 = c300300 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then c350300 = c350300
+ 1
```

' u2 when 300<u1<=350

```
If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 300 Then c50350 = c50350 + 1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 300 Then c100350 = c100350 +
1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 300 Then c150350 = c150350
+ 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 300 Then c200350 = c200350
+ 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 300 Then c250350 = c250350
+ 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 300 Then c300350 = c300350
+ 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 300 Then c350350 = c350350 + 1
```

```
End If
Next i
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C5050 & " " & C10050 & " " &
C15050 & " " & C20050 & " " & C25050 & " " & C30050 & " " &
C35050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50100 & " " & C100100 & " " &
c150100 & " " & c200100 & " " & c250100 & " " & c300100 & " " &
c350100
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50150 & " " & C100150 & " " &
c150150 & " " & c200150 & " " & c250150 & " " & c300150 & " " &
& c350150
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50200 & " " & C100200 & " " &
c150200 & " " & c200200 & " " & c250200 & " " & c300200 & " " &
& c350200
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50250 & " " & c100250 & " " &
& c150250 & " " & c200250 & " " & c250250 & " " & c300250 & " " &
" & c350250
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50300 & " " & c100300 & " " &
& c150300 & " " & c200300 & " " & c250300 & " " & c300300 & " " &
" & c350300
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50350 & "      " & c100350 & "      "
& c150350 & "      " & c200350 & "      " & c250350 & "      " & c300350 & "
" & c350350
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10) & "Total number of
systems: "
Text.Text = Text.Text & C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 +
C35050 + C50100 + C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 +
c350100 + C50150 + C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 +
c350150 + C50200 + C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 +
c350200 + c50250 + c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 +
c350250 + c50300 + c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 +
c350300 + c50350 + c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 +
c350350
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10)
j = C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 + C35050 + C50100 +
C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 + c350100 + C50150 +
C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 + c350150 + C50200 +
C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 + c350200 + c50250 +
c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 + c350250 + c50300 +
c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 + c350300 + c50350 +
c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 + c350350

Open "c:\vbbinaries\MixdataRes.txt" For Output As #1

For i = 0 To j
  Print #1, MixA(i) & Chr(9); MixB(i)
Next i

Close #1

End Sub

Private Sub Omega_Click()
  Dim i, j As Variant
  Dim Counter(200), Num

  i = 0

  Dim StarA(1010, 2) As Integer

  'Inserting the data into the arrays

  Open "c:\vbbinaries\Omega.txt" For Input As #1

  Do Until EOF(1)
    Input #1, StarA(i, 1), StarA(i, 2)
    i = i + 1
  Loop

  Close #1

  For i = 0 To 1010
    For j = 0 To 100 Step 1
      If Abs(StarA(i, 1) - StarA(i, 2)) < j + 1 And Abs(StarA(i, 1) - StarA(i, 2)) >= j
    Then Counter(j) = Counter(j) + 1
      Next j
    Next i

  For j = 0 To 100 Step 1
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & "< " & j & " = " & Counter(j)
Num = Num + Counter(j)
Next j
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Num
```

```
For j = 0 To 100
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & j
Next
```

```
End Sub
```

```
Private Sub SubClasses0_Click()
```

```
Dim i, j, k As Variant
Dim C5050, C10050, C15050, C20050, C25050, C30050, C35050, C50100,
C100100, c150100, c200100, c250100, c300100, c350100, C50150, C100150,
c150150, c200150, c250150, c300150, c350150, C50200, C100200, c150200,
c200200, c250200, c300200, c350200, c50250, c100250, c150250, c200250,
c250250, c300250, c350250, c50300, c100300, c150300, c200300, c250300,
c300300, c350300, c50350, c100350, c150350, c200350, c250350, c300350,
c350350 As Variant
Dim C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 As Variant
```

```
C5050 = 0: C10050 = 0: C15050 = 0: C20050 = 0: C25050 = 0: C30050 = 0: C35050
= 0
C50100 = 0: C100100 = 0: c150100 = 0: c200100 = 0: c250100 = 0: c300100 = 0:
c350100 = 0
C50150 = 0: C100150 = 0: c150150 = 0: c200150 = 0: c250150 = 0: c300150 = 0:
c350150 = 0
C50200 = 0: C100200 = 0: c150200 = 0: c200200 = 0: c250200 = 0: c300200 = 0:
c350200 = 0
c50250 = 0: c100250 = 0: c150250 = 0: c200250 = 0: c250250 = 0: c300250 = 0:
c350250 = 0
c50300 = 0: c100300 = 0: c150300 = 0: c200300 = 0: c250300 = 0: c300300 = 0:
c350300 = 0
c50350 = 0: c100350 = 0: c150350 = 0: c200350 = 0: c250350 = 0: c300350 = 0:
c350350 = 0
```

```
C1 = C2 = C3 = C4 = C5 = C6 = C7 = 0
```

```
i = 0
j = 0
k = 0
```

```
'Building two arrays, one for the first component
'of each binary system, and the other for the second one.
```

```
Dim StarA(1010, 2) As Integer
Dim StarB(1010, 2) As Integer
```

```
'Inserting the data into the arrays
```

```
Open "c:\vb\binaries\data.txt" For Input As #1
```

```
Do Until EOF(1)
Input #1, StarA(i, 2), StarA(i, 1)
Input #1, StarB(i, 2), StarB(i, 1)
i = i + 1
```

Loop

Close #1

Dim MixA(2038180) As Integer
Dim MixB(2038180) As Integer

For k = 0 To 5

For c = 0 To 2038179

MixA(c) = 0

MixB(c) = 0

Next c

j = 0

' Mixing u1 with u2

For i = 0 To 1009

If Abs(StarA(i, 1) - StarB(i, 1)) = k Then

MixA(i) = StarA(i, 2)

MixB(i) = StarB(i, 2)

End If

Next i

j = 0

C5050 = 0: C10050 = 0: C15050 = 0: C20050 = 0: C25050 = 0: C30050 = 0: C35050 = 0

C50100 = 0: C100100 = 0: c150100 = 0: c200100 = 0: c250100 = 0: c300100 = 0: c350100 = 0

C50150 = 0: C100150 = 0: c150150 = 0: c200150 = 0: c250150 = 0: c300150 = 0: c350150 = 0

C50200 = 0: C100200 = 0: c150200 = 0: c200200 = 0: c250200 = 0: c300200 = 0: c350200 = 0

c50250 = 0: c100250 = 0: c150250 = 0: c200250 = 0: c250250 = 0: c300250 = 0: c350250 = 0

c50300 = 0: c100300 = 0: c150300 = 0: c200300 = 0: c250300 = 0: c300300 = 0: c350300 = 0

c50350 = 0: c100350 = 0: c150350 = 0: c200350 = 0: c250350 = 0: c300350 = 0: c350350 = 0

' Count the number of systems in each category for the mixed stars

For i = 0 To 2038179

If MixB(i) And MixA(i) <> 0 Then

' u2 when u1<=50

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) <= 50 Then C5050 = C5050 + 1

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) <= 50 Then C10050 = C10050 + 1

If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) <= 50 Then C15050 = C15050 + 1

If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) <= 50 Then C20050 = C20050 + 1

If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) <= 50 Then C25050 = C25050 + 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) <= 50 Then C30050 = C30050 +
1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) <= 50 Then C35050 = C35050 + 1

' u2 when 50<u1<=100

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then C50100 = C50100 +
1

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
C100100 = C100100 + 1

If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c150100 = c150100 + 1

If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c200100 = c200100 + 1

If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c250100 = c250100 + 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then
c300100 = c300100 + 1

If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 50 And MixB(i) <= 100 Then C35050 = c350100 +
1

' u2 when 100<u1<=150

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then C50150 = C50150 +
1

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
C100150 = C100150 + 1

If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c150150 = c150150 + 1

If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c200150 = c200150 + 1

If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c250150 = c250150 + 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then
c300150 = c300150 + 1

If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 100 And MixB(i) <= 150 Then c350150 = c350150
+ 1

' u2 when 150<u1<=200

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then C50200 = C50200 +
1

If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
C100200 = C100200 + 1

If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c150200 = c150200 + 1

If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c200200 = c200200 + 1

If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c250200 = c250200 + 1

If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then
c300200 = c300200 + 1

If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 150 And MixB(i) <= 200 Then c350200 = c350200
+ 1

' u2 when 200<u1<=250

If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then c50250 = c50250 +
1


```
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c100250 = c100250 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c150250 = c150250 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c200250 = c200250 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c250250 = c250250 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then
c300250 = c300250 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 200 And MixB(i) <= 250 Then c350250 = c350250
+ 1
```

' u2 when 250<u1<=300

```
If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then c50300 = c50300 +
1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c100300 = c100300 + 1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c150300 = c150300 + 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c200300 = c200300 + 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c250300 = c250300 + 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then
c300300 = c300300 + 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 250 And MixB(i) <= 300 Then c350300 = c350300
+ 1
```

' u2 when 300<u1<=350

```
If MixA(i) <= 50 And MixB(i) > 300 Then c50350 = c50350 + 1
If MixA(i) > 50 And MixA(i) <= 100 And MixB(i) > 300 Then c100350 = c100350 +
1
If MixA(i) > 100 And MixA(i) <= 150 And MixB(i) > 300 Then c150350 = c150350
+ 1
If MixA(i) > 150 And MixA(i) <= 200 And MixB(i) > 300 Then c200350 = c200350
+ 1
If MixA(i) > 200 And MixA(i) <= 250 And MixB(i) > 300 Then c250350 = c250350
+ 1
If MixA(i) > 250 And MixA(i) <= 300 And MixB(i) > 300 Then c300350 = c300350
+ 1
If MixA(i) > 300 And MixB(i) > 300 Then c350350 = c350350 + 1
End If
```

Next i

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C5050 & " " & C10050 & " " &
C15050 & " " & C20050 & " " & C25050 & " " & C30050 & " " &
C35050
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50100 & " " & C100100 & " " &
c150100 & " " & c200100 & " " & c250100 & " " & c300100 & " " &
c350100
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50150 & " " & C100150 & " " &
c150150 & " " & c200150 & " " & c250150 & " " & c300150 & " " &
& c350150
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & C50200 & " " & C100200 & " " &
c150200 & " " & c200200 & " " & c250200 & " " & c300200 & " " &
& c350200
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50250 & "      " & c100250 & "      "  
& c150250 & "      " & c200250 & "      " & c250250 & "      " & c300250 & "  
& c350250
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50300 & "      " & c100300 & "      "  
& c150300 & "      " & c200300 & "      " & c250300 & "      " & c300300 & "  
& c350300
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & c50350 & "      " & c100350 & "      "  
& c150350 & "      " & c200350 & "      " & c250350 & "      " & c300350 & "  
& c350350
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10) & Chr(13) & Chr(10) & "Total number of  
systems which have differences of " & k & " subclasses is: "
```

```
Text.Text = Text.Text & C5050 + C10050 + C15050 + C20050 + C25050 + C30050 +  
C35050 + C50100 + C100100 + c150100 + c200100 + c250100 + c300100 +  
c350100 + C50150 + C100150 + c150150 + c200150 + c250150 + c300150 +  
c350150 + C50200 + C100200 + c150200 + c200200 + c250200 + c300200 +  
c350200 + c50250 + c100250 + c150250 + c200250 + c250250 + c300250 +  
c350250 + c50300 + c100300 + c150300 + c200300 + c250300 + c300300 +  
c350300 + c50350 + c100350 + c150350 + c200350 + c250350 + c300350 +  
c350350
```

```
Text.Text = Text.Text & Chr(13) & Chr(10)
```

Next k

End Sub

רשימת מקורות:

ספרים בעברית:

[1] הרפז ע., התפתחות כוכבים, 118-125, ספרית פועלים, תל-אביב, 1995.

[2] מרצבך ע. ושמרון א., תורת ההסתברות, 115-116, הוצאת אקדמון, ירושלים, 1993.

ספרים:

- [3] Audouze J. and Israël G., Ed., The Cambridge Atlas of Astronomy, 282-287, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [4] Cox, A. N., Ed., Allen's Astrophysical Quantities, 389, Athlone Press Ltd., London, 2000.
- [5] Goldberg H. S. and Scadron M. D., Physics of Stellar Evolution and Cosmology, 33-41, Gordon and Breach Science Publishers, New-York, 1981.
- [6] Lena P., Lebrun F., and Mignard F., Observational Astrophysics, 198-215, Springer-Verlag, Berlin-Hidelberg, 1998.
- [7] Schatzman E. L. and Parderie F., The Stars, 19-30, Springer-Verlag, Berlin-Hidelberg, 1993.

- [8] Trumpler R. J. and Weaver H. F., Statistical Astronomy,
University of California Press, Berkeley, California, 1953.

מאמרים:

- [9] Abt H. A., "Are Stellar Rotational Axes Distributed Randomly ?",
Astron. J., **122**, 2008-2012, 2001.
- [10] Bernacca P. L., "Statistical Studies in Stellar Rotation. II. A
Method of Analyzing Rotational Coupling in Double stars and an
Introduction to Its Applications", Astron. J., **177**, 161-175, 1972.
- [11] Giuricin G., Mardirossian F., and Mezzetti M., "Synchronization
in Eclipsing Binary Stars", Astron. & Astrophys., **131**, 152-158,
1984.
- [12] Giuricin G., Mardirossian F., and Mezzetti M., "Synchronization
in Early-Type Spectroscopic Binary Stars", Astron. & Astrophys.,
135, 393-396, 1984.
- [13] Glebocki R., Gnacinski P., Stawikowski A., "The Catalogue of
Stellar Projected Rotational Velocities", Acta Astron., **50**, 509,
2000.

- [14] Groot P.J., Pitters A.J.M., and van Paradijs J., "Rotational Velocities of F dwarfs; Application of the Fourier-Bessel Transformation Method", *Astron. & Astrophys. Suppl. Ser.*, **118**, 545-555, 1996.
- [15] Jaschek C. and Gómez A. E., "The Frequency of Spectroscopic Binaries", *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **82**, 809-814, 1970.
- [16] Jaschek C., "On the Rotation of A-Type Stars", *Stellar Rotation*, Ed. A. Slettebak, 219-226, Reidel, Dordrecht, 1970.
- [17] Levato H., "Rotation in Binary Stars", *Astron. & Astrophys.*, **35**, 259-265, 1974.
- [18] Levato H., "Synchronization in Binaries and Age", *Astron. J.*, **203**, 680-688, 1976.
- [19] Magee H. R. M. , Dufton P. L., Keenan F. P., Rolleston W. R. J., Kilkenny D., O'Donoghue D., Koen C., Stobie R. S., and Peterson R. C., "Rotational Velocities of B-Type Stars from the Edinburgh-Cape Survey", *Astron. & Astrophys.*, **338**, 85–90, 1998.
- [20] Pan K., "Synchronization in the Early-Type Detached Binary Stars", *Astron. & Astrophys.*, **321**, 202-206, 1997.

- [21] Slettebak A., "The Spectra and Axial Rotational Velocities of the Components of 116 Visual Double-Star Systems", Astrophys. J., **138**, 118-139, 1963.
- [22] Steinitz R. and Pyper D. M., "Rotational Correlation in Binary Stars", Stellar Rotation, Ed. A. Slettebak, 165-177, Reidel, Dordrecht, 1970.
- [23] Zahn J. -P., "Tidal Friction in Close Binary Stars", Astron. & Astrophys., **57**, 383-394, 1977.

CONTENTS

1. Introduction
 - 1.1. General background
 - 1.2. Types of binary systems
 - 1.2.1. Optical binaries
 - 1.2.2. Visual binaries
 - 1.2.3. Astrometric binaries
 - 1.2.4. Spectroscopic binaries
 - 1.2.5. Spectral binaries
 - 1.2.6. Eclipsing binaries
 - 1.3. Mechanics of binary systems
2. Mathematical introduction
3. Sample
4. Rotational velocities illustration
5. Analysis
 - 5.1. The Ω test
 - 5.2. Bivariate distribution, marginal distribution, linear regression
 - 5.3. Graphical presentation of the regression test
 - 5.4. Spectral distance test
 - 5.5. Covariance test
 - 5.6. The convolution test
6. Conclusions
7. Appendix A – measurements of projected rotational velocities
8. Appendix B – The computer program
9. References

the regression lines. However, correlation for the Binary set RB (Real Binaries) is very evident.

As the components of binaries are closer, their tidal interaction becomes stronger, to the extent that in very close binaries stellar rotations are even synchronized (e.g. Mercury). Thus, future work on evolution of binary systems will have to take into account this possibility, in addition of the current results.

Steinitz and Pyper, 1970: "We emphasize the need for more observational data. This would permit a more extended analysis to be carried out." Thirty years later, we have it.

present only in real binary systems, we construct two artificial sets of binaries:

Set AB (Artificial Binaries, containing 2038180 systems), obtained by shuffling the components of the real systems, and excluding the real ones. The second set, ABR (Artificial Binaries, Restricted, containing 263344 systems) obtained from Set AB through further restriction: all pairs are eliminated, save for those whose difference in spectral type of the system is not larger than two spectral subclasses. This is a more stringent condition than the one we admit for the basic, real systems. Finally, set RB, the real binaries (1010 systems).

Table 1 displays the regression of conditional mean velocity of one component, given the second one, of the artificial sets AB, ABR, and the real, (natural) set RB. In addition, for comparison, the table includes also the regression of the original set of binaries studied by Steinitz and Pyper (visual binaries only). The main, significant results are highlighted.

Table 1 – Results of linear regressions.

	Set AB	Set ABR (Restricted)	Set RB	Set RB (Vis.)
Type of set	Artificial binaries 2038180systems	Artificial binaries 263344 systems	Real Binaries 1010 systems	Real Binaries Visual only 50 systems
$\bar{u}_1(u_2)$.004 u_2 +125	-.004 u_2 +126	.856u_2+32	.718 u_2 +40
$\bar{u}_2(u_1)$.005 u_1 +115	.022 u_1 +108	.766u_1+15	.385 u_1 +76

As expected, correlation in artificial systems (Set AB and ABR) is totally insignificant. This is indicated by the (extremely) small slope of

systems and of single stars. On the other hand, Steinitz and Pyper (1970) concluded that some correlation of RVD is present for the components of visual binaries. Further studies by Levato (1974) discussed this issue for visual binaries and close binary systems.

Our current investigation is an extension of the original study (Steinitz and Pyper, 1970), which included about 50 systems. We now have more than a thousand systems, so that the current results carry more credence and significance. In selecting the binary sets to be tested for RVD correlation we use the Catalogue of Stellar Projected Rotational Velocities (Glebocki et al, 2000), and impose the following restrictions:

- (I) The spectral type of both components is earlier than A9 (F0), since inclusion of slowly-rotating late-type stars is meaningless.
- (II) Both components are on the main sequence. Giants and Supergiants are excluded, since they may have lost their original rotational velocities.

In passing, we mention that we have eliminated from the outset all multiple systems that include more than two stars.

We now introduce three sets of binaries, the real ones, and two artificial to be tested for RVD correlation. The motivation to construct these sets is as follows:

There might be a (spin projection) correlation between any two stars, selected at random, because we restrict the stars included in our tests to a narrow range in spectral type and thus to a narrow range in velocities. To eliminate this possibility, and show that correlation is

BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV

BEER-SHEVA ISRAEL

ROTATIONAL CORRELATION OF STARS IN
BINARY SYSTEMS

Thesis for the M.Sc. degree In the Faculty of Natural Science.

SUMMARY

Determining stellar masses is achieved through the study of binary systems. Also the determination of radii is based (originally) on such systems. There are additional parameters to be gleaned from similar studies. Specifically, our aim here is to determine the degree of projected rotational velocity correlation between members of binary systems. In doing so, we have in mind the notion that as the system evolves, the original angular momentum of the accreting mass is shared between orbital and spin angular momentum. This, provided the system evolved without external perturbations. Thus, one might expect that spin angular momenta of the stars are roughly parallel to the orbital one. In that case, the measured $V_e \sin(i)$ values will be correlated. The sun and its planets (although not a binary system), exhibits just that (except Uranus).

Slettebak (1963) did not find any significant difference between the mean Rotational Velocity Distribution (RVD) of members of binary

ROTATIONAL CORRELATION OF STARS IN
BINARY SYSTEMS

THESIS FOR THE M.SC. DEGREE IN THE
FACULTY OF NATURAL SCIENCE

BY: NETZACH FARBIASH

SUPERVISED BY: PROF. RAPHAEL STEINITZ

DEPARTMENT OF PHYSICS
FACULTY OF NATURAL SCIENCE
BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV

SIGNATURE OF THE STUDENT _____ DATE _____

APPROVED BY SUPERVISOR _____ DATE _____

APPROVED BY THE CHAIRMAN OF DEPARTMENT COMMITTEE

_____ DATE _____

BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV

BEER-SHEVA ISRAEL

FACULTY OF NATURAL SCIENCE

DEPARTMENT OF PHYSICS

**ROTATIONAL CORRELATION OF STARS IN
BINARY SYSTEMS**

Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the

M.Sc. degree.

Netzach Farbiash

January 2003